Anwendung binärer Invarianten zur Bestimmung der Wendetangenten einer Kurve dritter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 4. Mai 1908

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Leroy A. Howland

aus New Bedford, U.S.A.

München 1908.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Anwendung binärer Invarianten zur Bestimmung der Wendetangenten einer Kurve dritter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 4. Mai 1908

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Leroy A. Howland

aus New Bedford, U.S.A.

München 1908.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548322_0178

Einleitung.

In der „Theorie der binären algebraischen Formen“ (S. 234) von A. Clebsch findet man das folgende Problem: eine lineare binäre Form ξ_x soll gefunden werden, so daß $\xi_x^3 - 3f\xi_x + 2\varphi$ ein vollständiger Kubus wird, oder daß ξ_x der Identität

$$\xi_x^3 - 3f\xi_x + 2\varphi = \eta_x^3$$

genügt, wo $f = a_x^2$ und $\varphi = a_x^3$ gegebene binäre Formen von zweiter bzw. dritter Ordnung sind und η_x eine unbekannte lineare Form bezeichnet, welche nur bis auf eine dritte Wurzel der Einheit bestimmt werden kann.

Clebsch hat dieses Problem in dem allgemeinsten Falle, d. h., wenn keine Beziehungen zwischen den Koeffizienten von f und φ bestehen, gelöst und hat bewiesen, daß es neun Werte von ξ_x gibt.

In der vorliegenden Arbeit werde ich Beziehungen zwischen den Covarianten oder Invarianten von f und φ aufstellen, welche bestehen müssen, wenn das Problem weniger als neun Lösungen hat. Ich werde zeigen, wie viele Lösungen in solchen Fällen existieren und wie sie dann gefunden werden können. Hierauf werde ich den Zusammenhang zwischen dem analytischen Probleme und der Bestimmung der Wendetangenten einer Kurve dritter Ordnung erklären und zeigen, welche projektivischen Eigenschaften der Kurve diesen Invarianten-Relationen entsprechen, (§ XX ff.). Durch geometrische Überlegung kann man sich dadurch von den verschiedenen Fällen, die hier eintreten, Rechenschaft geben; das Resultat

solcher Überlegung wird dann umgekehrt durch unsere algebraischen Entwickelungen bestätigt.

Die Symbolik ist die des oben erwähnten Werkes von Clebsch. Der erste Paragraph dieser Arbeit ist im wesentlichen ein Teil seiner Lösung, ebenso die Aufstellung der Gleichung 10 von Paragraph II und der Inhalt der Paragraphen VI und VII.

Ich halte es für meine erste Pflicht, Herrn Professor Dr. F. Lindemann den wärmsten Dank auszusprechen für die Anregung zur Abfassung dieser Arbeit und für seine gütige Unterstützung, die er mir in der wohlwollendsten Weise während der Ausführung zuteil werden ließ.

I.

Die allgemeine Lösung.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine lineare binäre Form ξ_x zu finden, welche der Identität

$$\xi_x^3 - 3f\xi_x + 2\varphi = \eta_x^3 \tag{1}$$

genügt. $f = a_x^2$ und $\varphi = a_x^3$ sind Formen von zweiter bzw. dritter Ordnung. Wir nehmen an, daß die Koeffizienten von f und φ ganz unabhängig sind, und stellen die Gleichung auf, welche das Verhältnis $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ gibt. Aus der Identität

$$(\xi\eta)\, a_x + (\eta a)\, \xi_x + (a\xi)\, \eta_x = 0$$

folgt

$$(\xi\eta)^2 a_x^2 = (\xi\eta)^2 \cdot f = [(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x]^2$$

und

$$(\xi\eta)^3 a_x^3 = (\xi\eta)^3 \cdot \varphi = [(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x]^3.$$

Wir multiplizieren (1) mit $(\xi\eta)^3$ und führen die eben gefundenen Werte ein. So bekommen wir:

$$\xi^3(\xi\eta)^3 - 3\xi(\xi\eta)[(a\eta)\xi - (a\xi)\eta]^2 + 2[(a\eta)\xi - (a\xi)\eta]^3 = \eta^3(\xi\eta)^3. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist eine Identität in ξ und η; also müssen die folgenden Gleichungen zwischen den Koeffizienten stattfinden:

$$\begin{cases} (\xi\eta)^3 + 2(a\eta)^3 - 3(\xi\eta)(a\eta)^2 = 0 \\ (\xi\eta)(a\eta)(a\xi) - (a\eta)^2(a\xi) = 0 \\ (\xi\eta)(a\xi)^2 - 2(a\eta)(a\xi)^2 = 0 \\ 2(a\xi)^3 + (\xi\eta)^3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen werden wir η eliminieren. Die dritte Gleichung (3) ist:

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)(a\xi)^2 - 2(a_1\eta_2 - a_2\eta_1)(a\xi)^2 = 0$$

oder

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{2a_1(a\xi)^2 - \xi_1(a\xi)^2}{2a_2(a\xi)^2 - \xi_2(a\xi)^2},$$

also

$$k\eta_x = 2a_x(a\xi)^2 - \xi_x(a\xi)^2. \tag{4}$$

Setzen wir $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$, dann ist:

$$k(\xi\eta) = -2(a\xi)^3 = -2\varphi_1. \tag{5}$$

Die letzte Gleichung (3) ist $2\varphi_1 = -(\xi\eta)^3 = +\frac{8\varphi_1^3}{k^3}$ und daraus folgt:

$$k^3 = 4\varphi_1^2. \tag{6}$$

Wir multiplizieren die ersten beiden Gleichungen (3) mit ξ_x bzw. η_x, addieren und erhalten:

$$2(a\eta)^2[(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x] = 3(\xi\eta)(a\eta)^2\xi_x - 2(\xi\eta)(a\eta)(a\xi)\eta_x - (\xi\eta)^3\xi_x$$

oder, wenn wir die Identität $(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x = (\xi\eta)a_x$ benutzen und durch $(\xi\eta)$ dividieren, dann erhalten wir:

$$2(a\eta)^2 a_x = 3(a\eta)^2\xi_x - 2(a\eta)(a\xi)\eta_x - (\xi\eta)^2\xi_x. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Gleichung (4) können wir η aus (7) auf folgende Weise eliminieren:

$$k^2\eta_x^2 = 4a_x\beta_x(a\xi)^2(\beta\xi)^2 - 4a_x\xi_x(a\xi)^2(a\xi)^2 + \xi_x^2(a\xi)^2(b\xi)^2$$
$$k\eta_x\xi_x = 2a_x\xi_x(a\xi)^2 - \xi_x^2(a\xi)^2.$$

In beiden Gleichungen setzen wir $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$ und in der ersten $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$ und multiplizieren letztere mit a_x und bekommen:

$$(8)\quad \begin{cases} k^2(a\eta)^2 = 4(a\xi)^2(\beta\xi)^2(a\alpha)(a\beta) - 4(a\xi)^2(a\xi)(a\alpha)(b\xi)^2 \\ \qquad\qquad + (a\xi)^2(b\xi)^2(c\xi)^2 \\ k(a\eta)(a\xi) = 2(a\xi)^2(a\alpha)(a\xi) - (a\xi)^2(b\xi)^2 \\ k^2(a\eta)^2 a_x = 4(a\beta)(\beta\xi)^2(a\gamma)(\gamma\xi)^2 a_x - 4(a\beta)(\beta\xi)^2(a\xi)^2(a\xi)a_x \\ \qquad\qquad + (a\xi)^2(b\xi)^2(a\xi)^2 a_x. \end{cases}$$

Wir benutzen die folgenden Symbole aus der Invarianten-Theorie, worin jedesmal x_1 und x_2 durch $\xi_2, -\xi_1$ ersetzt werden:

$$f = (a\,\xi)^2 \qquad \Theta = (a\,a)(a\,\xi)(a\,\xi)^2 \qquad D = (a\,b)^2$$
$$\varphi = (a\,\xi)^3 \qquad p = (a\,a)^2(a\,\xi) \qquad E = (a\,\Delta)^2$$
$$\Delta = (\Delta\,\xi)^2 = (\alpha\beta)^2(\alpha\,\xi)(\beta\,\xi) \qquad Q = (a\,\Delta)(\Delta\,\xi)(a\,\xi)^2$$
$$\Omega = (a\,\Delta)(a\,\xi)(\Delta\,\xi).$$

Wir werden diese Symbole in (8) einführen. Wir haben die Identität:

$$(ab)(ac)(db)(dc) = \tfrac{1}{2}\{(ab)^2(c\,d)^2 + (ac)^2(b\,d)^2 - (a\,d)^2(bc)^2\}$$

also

$$\begin{aligned}(a\,a)(\alpha\beta)(a\,\xi)^2(\beta\,\xi)^2 &= \tfrac{1}{2}(a\,\xi)(\beta\,\xi)\{(aa)^2(\beta\,\xi)^2 + (a\,\beta)^2(a\,\xi)^2 - (a\,\xi)^2(\alpha\beta)^2\}\\ &= (a\,a)^2(a\,\xi)(\beta\,\xi)^3 - \tfrac{1}{2}(a\,\xi)^2(a\,\beta)^2(a\,\xi)(\beta\,\xi)\\ &= p\varphi - \tfrac{1}{2}\Delta f.\end{aligned}$$

Ähnlich ist

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\,\xi)^2(\gamma\,\xi)^2 a_x &= \tfrac{1}{2}(\beta\,\xi)(\gamma\,\xi)\{(\alpha\beta)^2(\gamma\,\xi)^2 + (\alpha\gamma)^2(\beta\,\xi)^2 - (\beta\gamma)^2(\alpha\,\xi)^2\}\\ &= (\alpha\,\beta)^2(\beta\,\xi)a_x\varphi - \tfrac{1}{2}(a\,\xi)^2 a_x\Delta\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta)(\beta\,\xi)^2(a\,\xi)a_x &= \tfrac{1}{2}(\alpha\,\beta)(a\,\xi)(\beta\,\xi)\{(\beta\,\xi)a_x + (a\,\xi)\beta_x\}\\ &= -\tfrac{1}{2}(\alpha\,\beta)^2(a\,\xi)(\beta\,\xi)\xi_x = -\tfrac{1}{2}\Delta\,\xi_x.\end{aligned}$$

Also anstatt der Gleichungen (8) können wir schreiben:

$$k^2(a\,\eta)^2 = 4\,p\,\varphi - 2\,\Delta f - 4\,\Theta f + f^3$$
$$k(a\,\eta)(a\,\xi) = 2\Theta - f^2$$
$$k^2(a\,\eta)^2 a_x = 4(\alpha\,\beta)^2(\beta\,\xi)a_x\varphi - 2(a\,\xi)^2 a_x\Delta + 2\Delta f\,\xi_x + f^2(a\,\xi)^2 a_x.$$

Wir führen diese Werte in (7) ein und haben:

$$\begin{aligned}&8(\alpha\,\beta)^2(\beta\,\xi)\varphi\,a_x - 2(a\,\xi)^2\Delta\,a_x - 2\,\Delta f\,\xi_x + f^2(a\,\xi)^2 a_x\\ &= 3(4\,p\,\varphi - 2\,\Delta f - 4\,\Theta f + f^3)\xi_x - 2\,k(2\,\Theta - f^2)\eta_x - k^2(\xi\,\eta)^2\xi_x.\end{aligned}$$

Aber (5) gibt

$$k^2(\xi\,\eta)^2 = 4\,\varphi^2$$

und (4) gibt

$$k\,\eta_x = 2(a\,\xi)^2 a_x - (a\,\xi)^2\xi_x.$$

Die Gleichung verwandelt sich dann in folgende:

$$(9)\qquad \begin{aligned}&[8(\alpha\beta)^2(\beta\xi)\varphi + (\alpha\xi)^2(8\Theta - 4\Delta - 2f^2)]\,a_x\\ &+ [10\Delta f - 12p\varphi + 8f\Theta - f^3 + 4\varphi]\,\xi_x = 0.\end{aligned}$$

Wenn wir in (9) x_1 durch ξ_2 und x_2 durch $-\xi_1$ ersetzen, so bekommen wir:

$$8\Delta\varphi + (8\Theta - 4\Delta - 2f^2)\varphi = 0$$

oder

$$(10)\qquad 4\Theta + 2\Delta - f^2 = 0.$$

Wir können diese Gleichung benutzen um (9) umzuformen. Das erste Glied, $8(\alpha\beta)^2(\beta\xi)\varphi + (\alpha\xi)^2(8\Theta - 4\Delta - 2f^2)a_x$, ist dann gleich $8(\alpha\beta)^2(\beta\xi)\varphi\,a_x - 8\Delta(\alpha\xi)^2 a_x$.

Nun ist die erste Polare von $\Delta_x^2 = (\alpha\beta)^2 a_x \beta_x$ gleich:

$$\Delta_x\Delta_y = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2\{a_x\beta_y + a_y\beta_x\} = (\alpha\beta)^2 a_x\beta_y,$$

und wenn wir $y_1 = \xi_2$, $y_2 = -\xi_1$ setzen, so haben wir:

$$(\Delta\xi)\Delta_x = (\alpha\beta)^2(\beta\xi)a_x.$$

Also:

$$\begin{aligned}8(\alpha\beta)^2(\beta\xi)a_x\varphi - 8\Delta(\alpha\xi)^2 a_x &= 8(\alpha\xi)^3(\Delta\xi)\Delta_x - 8(\alpha\xi)^2(\Delta\xi)^2 a_x\\ &= 8(\alpha\xi)^2(\Delta\xi)[(\alpha\xi)\Delta_x - (\Delta\xi)a_x]\\ &= 8(\alpha\xi)^2(\Delta\xi)(\alpha\Delta)\xi_x = 8Q\xi_x.\end{aligned}$$

Wir führen den erhaltenen Wert in (9) ein, dividieren durch ξ_x und bekommen:

$$8Q + 10f\Delta + 8f\Theta - 12p\varphi - f^3 + 4\varphi^2 = 0,$$

oder, wenn wir von dieser Gleichung die mit $2f$ multiplizierte Gleichung (10) abziehen, erhalten wir:

$$(11)\qquad 8Q + 6f\Delta - 12p\varphi + f^3 + 4\varphi^2 = 0.$$

(10) und (11) sind zwei nicht homogene Gleichungen in ξ; daraus bilden wir eine homogene Gleichung auf folgende Weise. Wir setzen in (10) und (11) $\frac{\xi_1}{\lambda}$, $\frac{\xi_2}{\lambda}$ anstatt ξ_1 und ξ_2, wo λ gleich 1 ist, und dann eliminieren wir λ.

$$(12)\qquad \begin{cases} 2\Delta\lambda^2 + 4\Theta\lambda - f^2 = 0 \\ 8Q\lambda^3 + 6(f\Delta - 2p\varphi)\lambda^2 + 4\varphi^2 + f^3 = 0. \end{cases}$$

Die Resultante läßt sich nach der Methode von Sylvester bilden und ist, abgesehen von dem Faktor 32, folgende:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &4\Delta^3\varphi^4 - 12\Delta^2\varphi^3 f^2 p + 9\Delta f^4 p^2\varphi^2 - 48 p\varphi^3\Delta\Theta^2 \\ &+ 24\varphi^2\Delta^2 f\Theta^2 - 24\varphi^2 f^2\Delta\Theta Q - 12 f^3\Delta p\varphi\Theta^2 + 12 f^4 p\Theta\varphi Q \\ &+ 6 f^4\Delta^2\Theta^2 - 12 f^5\Delta\Theta Q - 2 f^6 Q^2 + 4 f^6\Delta^3 - 12 f^5\Delta^2 p\varphi \\ &+ 8\varphi^2\Delta^3 f^3 - 64\varphi^2 Q\Theta^3 - 16 f^3 Q\Theta^3 = 0. \end{aligned}$$

Nun ist das Quadrat der Funktionaldeterminante von f und φ eine quadratische Funktion dieser Formen, deren Koeffizienten zweite Überschiebungen sind, oder symbolisch dargestellt:

$$(f,\varphi)_1^2 = -\tfrac{1}{2}\{(\varphi,\varphi)_2 f^2 - 2(f,\varphi)_2 f\cdot\varphi + (f,f)_2\varphi^2\},$$

oder:

$$(14)\qquad \Theta^2 = -\tfrac{1}{2}\{\Delta f^2 - 2pf\varphi + D\varphi^2\}.$$

Wir haben auch (vgl. Clebsch, S. 119):

$$(f,\varphi)_1(\varphi,\Delta)_1 = -\tfrac{1}{2}\{(f,\varphi)_2\varphi\Delta - (f,\Delta)_2\varphi^2 - (\varphi,\varphi)_2 f\Delta + (\varphi,\Delta)_2 f\varphi\},$$

oder:

$$(15)\qquad \Theta Q = \tfrac{1}{2}[\Delta^2 f - p\varphi\Delta + E\varphi^2].$$

Nun ist:

$$(a\,a)\,\Delta_x = (a\,\Delta)\,a_x - (a\,\Delta)\,a_x$$
$$(a\,a)\,a_x a_x^2\,\Delta_x^2 = (a\,\Delta)\,a_x\Delta_x a_x^3 - (a\,\Delta)\,a_x^2\Delta_x a_x^2$$

Also

$$\Theta\Delta = \Omega\varphi - Qf$$

oder

$$(16)\qquad Qf = \Omega\varphi - \Theta\Delta.$$

Wenn man Q aus (13) mit Hilfe der Gleichungen (15) und (16) eliminiert und für Θ^2 seinen Wert aus (14) einführt, so bekommt man die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
(17)\quad & \varphi^2[4\Delta^3\varphi^2 - 12f^2\Delta^2\varphi - 15f^4p^2\Delta - 16p\Delta\Theta^2\varphi - 16f^2p^2\Theta^2 \\
& + 8f\Delta\Theta\Omega\varphi + 12f^3p\Theta\Omega - 2f^4\Omega^2 - 8f^2p^2D\varphi^2 + 8f^3pD\Delta\varphi \\
& + 8f\Delta^2D\varphi^2 + 16ED\varphi^4 + 4f^3DE\varphi^2 + 16f^3p^3\varphi - 32fpE\varphi^3 \\
& - 8f^4pE\varphi] = 0.
\end{aligned}
$$

Wir können den überflüssigen Faktor φ^2 auslassen und zeigen, daß die reduzierte Gleichung durch φ teilbar ist. Wir brauchen nur die Glieder, welche den Faktor φ nicht enthalten, zu betrachten, nämlich:

$$
(18)\quad [-15f^4p^2\Delta - 16f^2p^2\Theta^2 + 12f^3p\Theta\Omega - 2f^4\Omega^2].
$$

Die Clebschsche Formel für das Produkt zweier Funktionaldeterminanten gibt

$$
\Theta\Omega = -\tfrac{1}{2}(D\varphi\Delta - Ef\varphi - pf\Delta)
$$

und wenn wir diese Formel und die Formel (14) für Θ^2 benutzen, verwandelt sich (18) in den folgenden Ausdruck:

$$
f^2[-f^2p^2\Delta - 16fp^3\varphi + 8p^2D\varphi^2 - 6fp\Delta D\varphi + 6f^2pE\varphi - 2f^2\Omega^2].
$$

Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß $p^2\Delta + 2\Omega^2$ durch φ teilbar ist.

$$
\begin{aligned}
\Omega &= (\alpha\Delta)\alpha_x\Delta_x = (\alpha\beta)^2(\alpha\alpha)\alpha_x\beta_x = (\alpha\beta)(\alpha\alpha)\beta_x(\alpha\beta)\alpha_x \\
&= (\alpha\beta)(\alpha\alpha)\beta_x[(\alpha\beta)\alpha_x - (\alpha\alpha)\beta_x] = -(\alpha\beta)(\alpha\alpha)^2\beta_x^2 \\
&= (\alpha p)\alpha_x^2.
\end{aligned}
$$

$$
2\Omega^2 = 2\alpha_x^2(\alpha p)\beta_x^2(\beta p).
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta p^2 &= (\alpha\beta)^2\alpha_x\beta_x p_x^2 = \alpha_x\beta_x[(\alpha\beta)p_x]^2 = \alpha_x\beta_x[(\beta p)\alpha_x - (\alpha p)\beta_x]^2 \\
&= \alpha_x^3\beta_x(\beta p)^2 - 2\alpha_x^2(\alpha p)\beta_x^2(\beta p) + \alpha_x\beta_x^3(\alpha p)^2.
\end{aligned}
$$

Also $2\Omega^2 + \Delta p^2 = 2\alpha_x^3\beta_x(\beta p)^2 = 2\alpha_x(\alpha p)^2\varphi = 2\Omega\varphi$.

Dann ist $2\Omega^2 + \Delta p^2$ durch φ teilbar und (17) ist jetzt auf die folgende Gleichung zurückgeführt:

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 4\Delta^3\varphi - 12f^2\Delta^2p - 16p\Delta\Theta^2 + 8f\Delta\Theta\Omega + 2f^3pD\Delta \\
& + 8f\Delta^2D\varphi + 16ED\varphi^3 + 4f^3DE\varphi - 32fpE\varphi^2 \\
& - 8f^4pE - 2f^4\Omega = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichung ist eine homogene vom 9. Grade in ξ. Daß diese Gleichung nicht weiter zu reduzieren ist und daß sie 9 Lösungen hat, werden wir zeigen, indem wir diese Lösungen wirklich finden.

II.

Wir kehren zu der Gleichung I, 1 zurück und nehmen das Lösungssystem ξ, η als bekannt an. Ist ξ', η' ein anderes System, so ist

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi^3 - 3f\xi + 2\varphi = \eta^3 \\ \xi'^3 - 3f\xi' + 2\varphi = \eta'^3, \end{cases}$$

wo f und φ wieder Funktionen von x_1 und x_2 sind. Durch Subtraktion geben diese Gleichungen:

$$(2) \qquad \xi^3 - \xi'^3 - 3f(\xi - \xi') = \eta^3 - \eta'^3.$$

Daher ist $\eta^3 - \eta'^3$ durch $\xi - \xi'$ teilbar und einer der Faktoren von $\eta^3 - \eta'^3$ muß durch $\xi - \xi'$ teilbar sein, oder

$$(3) \qquad \eta - \frac{\eta'}{\varepsilon} = m(\xi - \xi'),$$

wo m eine Konstante, ε eine dritte Einheitswurzel ist.

Wir setzen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \xi' &= \xi + z \qquad \text{und dann ist wegen (3)} \\ \eta' &= \varepsilon(\eta + mz). \end{aligned}$$

Wir setzen in (2) für ξ' und η' diese Werte ein, dividieren durch z und bekommen:

$$(5) \qquad (1 - m^3)z^2 + 3(\xi - m^2\eta)z + 3(\xi^2 - m\eta^2 - f) = 0.$$

Die Lösungen von (5) sind:

$$(6) \qquad z = \frac{-3(\xi - m^2\eta) \pm \sqrt{9(\xi - m^2\eta)^2 - 12(1 - m^3)(\xi^2 - m\eta^2 - f)}}{2(1 - m^3)}.$$

Wir müssen voraussetzen, daß m^3 nicht gleich 1 ist. Ist nämlich $m^3 = 1$ oder $m = \varepsilon$, so folgt aus (5)

$$z = \frac{f - \xi^2 + \varepsilon\eta^2}{\xi - \varepsilon^2\eta} = \frac{f}{\xi - \varepsilon^2\eta} - (\xi + \varepsilon^2\eta)$$

und daraus weiter, daß f durch $\xi - \varepsilon^2 \eta$ teilbar ist. Die erste Gleichung (1) zeigt, daß dann φ durch $\xi - \varepsilon^2 \eta$ teilbar ist, also daß f und φ einen gemeinsamen Faktor haben. Diesen Fall werden wir später untersuchen. ε ist eine lineare Form, und m in (6) muß so bestimmt werden, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat wird, d. h., daß seine Diskriminante verschwindet. Ist die Form $\varkappa a_x^2 + \lambda a_y^2$ gegeben, so ist die Diskriminante $D_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 D_1 + \varkappa\lambda D_2 + \lambda^2 D_3$, wo D_1 und D_3 die Diskriminanten von a_x^2 bzw. a_y^2 sind und D_2 das Doppelte der simultanen Invariante der beiden Formen ist.

In unserem Falle ist

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = -2[D - 2(K - mM) - 2mN]$$
$$D_3 = 4[K - 2m^2 L + m^4 M + m(1 - m^3) N],$$

wo wir der Bequemlichkeit halber $K = (a\xi)^2$, $L = (a\xi)(a\eta)$, $M = (a\eta)^2$ und $N = (\xi\eta)^2$ setzen.

Also ist:

$$D_{\varkappa\lambda} = -432(1 - m^3)[K - 2m^2 L + m^4 M + m(1 - m^3) N] - 288(1 - m^3)^2 [D - 2(K - mM) - 2mN].$$

Übergehen wir den Faktor $-144(1 - m^3)$, so lautet die Gleichung, welcher m genügen muß,

$$3[K - 2m^2 L + m^4 M + m(1 - m^3) N] + 2(1 - m^3)[D - 2(K - mM) - 2mN] = 0$$

oder nach Potenzen von m geordnet:

$$(N - M) m^4 + 2[2K - D] m^3 - 6Lm^2 + [4M - N] m + 2D - K = 0. \tag{7}$$

Die Invariante i dieser Gleichung ist Null, und die Gleichung läßt sich durch die Substitution

$$m = \frac{\frac{D}{2} - K - \sigma}{N - M} \tag{8}$$

in die folgende verwandeln:

$$\sigma^4 + 6\alpha\sigma^2 + 4\beta\sigma + \gamma = 0, \tag{9}$$

wo

$$\alpha = 2E - \frac{D^2}{4},\ \beta = 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}$$

und

$$\gamma = -3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2$$

ist. [Vgl. Clebsch „Binäre Formen“ S. 241 ff.]

Die Gleichung für σ ist also:

$$\sigma^4 + 6\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)\sigma^2 + 4\left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)\sigma - 3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2 = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung hat im allgemeinen vier verschiedene Wurzeln, und jeder Wurzel entspricht ein Wert von m. Jedem m entsprechen zwei Werte von z und von ξ'. Wir haben also zu jeder gegebenen Lösung, ξ, acht andere, welche sich zu vier Paaren gruppieren. Ein solches Paar bildet mit der ersten Lösung ein „System konjugierter Lösungen“. Wir gehen jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe der Diskussion besonderer Fälle über. Die Gleichung (10) hat eine zweifache Wurzel, welche zugleich eine dreifache Wurzel ist, wenn ihre Invariante J verschwindet. Dies ist der Fall, weil die Invariante I stets Null ist. Diese Invariante J ist:

$$J = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2E - \frac{D^2}{4} \\ 0 & 2E - \frac{D^2}{4} & 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} \\ 2E - \frac{D^2}{4} & 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} & -3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$J = -6\left[4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Durch die Koeffizienten der Gleichung (7) ausgedrückt, lautet sie:

$$J = -6\left[-4\left\{L(N-M)+\left(K-\frac{D}{2}\right)^2\right\}^3\right.$$
$$\left.+\left\{3L(N-M)\left(K-\frac{D}{2}\right)+(M-\tfrac{1}{4}N)(N-M)^2+2\left(K-\frac{D}{2}\right)^3\right\}^2\right].$$

Wenn wir diesen Ausdruck entwickeln und mit Hilfe der Gleichung:

$$2(KM-L^2)=DN, \tag{12}$$

[Vgl. Clebsch S. 240], umformen, so bekommen wir:

$$J=-6(N-M)^3\Big[L(2D-K)(N-M)$$
$$+2L\left(K-\frac{D}{2}\right)(M-\tfrac{1}{4}N)-L^3+(M-\tfrac{1}{4}N)^2(N-M) \tag{13}$$
$$+\left(K-\frac{D}{2}\right)^2(2D-K)\Big].$$

Bezeichnen wir die entsprechende Invariante der Gleichung für m mit j, so erhalten wir genau die mit 6 multiplizierte eckige Klammer.

Daher ist:

$$J=(N-M)^3 j, \tag{14}$$

während i natürlich ebenfalls verschwindet. Ist $N-M$ nicht Null, so verschwindet j mit J. Dann gibt (7) nur zwei Werte von m, und wir haben bloß fünf Werte von ξ_x. Ist $N-M$ Null, so ist J gleich Null und (10) hat eine dreifache Wurzel. Ob dann j Null ist oder nicht, können wir nicht sagen. Die Gleichung (7) wird

$$4\left(K-\frac{D}{2}\right)m^3-6Lm^2+3Mm+2D-K=0$$

sein, oder wenn wir D durch die Formel (12) wegschaffen,

$$4L^2m^3-6LMm^2+3M^2m+3KM-4L^2=0. \tag{15}$$

Sind m und m' zwei Lösungen, so haben wir neben der Gleichung (15) folgende:

$$4L^2m'^3 - 6LMm'^2 + 3M^2m' + 3KM - 4L^2 = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von (15) ab, so erhalten wir:

$$4L^2(m^3 - m'^3) - 6LM(m^2 - m'^2) + 3M^2(m - m') = 0$$

oder

$$(16)\quad 4L^2(m^2 + mm' + m'^2) - 6LM(m + m') + 3M^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche eine Beziehung zwischen zwei Lösungen der Gleichung (15) gibt. Sind m_1 und m_2 die Werte von m', welche diese Gleichung liefert, so wird:

$$(17)\quad \begin{cases} m_1 + m_2 = -\dfrac{2Lm - 3M}{2L} \\ m_1 m_2 = \dfrac{4L^2m^2 - 6LMm + 3M^2}{4L^2}. \end{cases}$$

Ist die Gleichung (15) gelöst, so sind die Gleichungen, welche z bestimmen, folgende:

$$(18)\quad z^2(1 - m_i^3) + 3(\xi - m_i^2\eta)z + 3(\xi^2 - m_i\eta^2 - a^2) = 0$$
$$[i = 0, 1, 2].$$

Die Bedingung, daß zwei von diesen Gleichungen eine gemeinsame Lösung haben, ist

$$(19)\quad \begin{aligned} &4\left[3(1 - m_1^3)(\xi^2 - m_1\eta^2 - a^2) - \tfrac{9}{4}(\xi - m_1^2\eta)^2\right]\left[3(1 - m_2^3)\right. \\ &\left.(\xi^2 - m_2\eta^2 - a^2) - \tfrac{9}{4}(\xi - m_2^2\eta)^2\right] - 3(1 - m_2^3)(\xi^2 - m_1\eta^2 - a^2) \\ &- \tfrac{9}{2}(\xi - m_2^2\eta)(\xi - m_1^2\eta) + 3(1 - m_1^3)(\xi^2 - m_2\eta^2 - a^2)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß diese Gleichung (19) für drei Werte der Variabeln und daher identisch befriedigt wird.

Erstens setzen wir $x_1 = \eta_2$, $x_2 = -\eta_1$. Dann wird (19) wegen der Bedingung $(\xi\eta)^2 - (a\eta)^2 = 0$ die folgende Identität sein:

$$4\left(-\tfrac{9}{4}(\xi\eta)^2\right)\left(-\tfrac{9}{4}(\xi\eta)^2\right) - \left(\tfrac{9}{2}(\xi\eta)^2\right)^2 = 0.$$

Zweitens setzen wir $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$ in (19) ein und erhalten:

$$4\,|\,3(1-m_1^3)(m_1M+K)+\tfrac{9}{4}m_1^4M\,|\,|\,3(1-m_2^3)(m_2M+K)$$
$$+\tfrac{9}{4}m_2^4M]-[3(1-m_2^3)(m_1M+K)+\tfrac{9}{2}m_1^2m_2^2M$$
$$+3(1-m_1^3)(m_2M+K)]^2$$

oder wenn wir umformen:

$$9(m_1-m_2)^2\{3M[m_1+m_2+m_1^2m_2^2][m_1m_2M+(m_1+m_2)K]$$
$$-[(1+m_1m_2(m_1+m_2)M+(m_1^2+m_1m_2+m_2^2)K]^2\}.$$

Wir übergehen den Faktor $9(m_1-m_2)^2$, welcher nicht Null ist, und wir setzen in dem andern für die symmetrischen Funktionen von m_1 und m_2 ihre Werte aus (8) ein. Das vereinfachte Resultat ist:

$$\frac{1}{64L^6}\{125L^6M^2m^6-[480L^5M^3+192L^6KM]m^5+[768L^4M^4$$
$$+672L^5KM^2]m^4-[64L^6M^2+648L^3M^5+816L^4KM^3]m^3$$
$$+[192L^5M^3+192L^6KM+288L^2M^6+360L^3KM^4$$
$$-144L^4K^2M^2]m^2-[192L^4M^4+384L^5KM^2+54LM^7$$
$$-36L^2KM^5-288L^3K^2M^3]m+72L^3M^5+246L^4KM^3$$
$$-5LKM^6-64L^6M^2-144L^2K^2M^4\}.$$

Dieser Ausdruck ist in Faktoren zerlegbar, nämlich:

$$\frac{1}{64L^6}[4L^2m^3-6LMm^2+3M^2m+3KM-4L^2]$$
$$[32L^4M^2m^3-(72L^3M^3+48L^4KM)m^2+(60L^2M^4$$
$$+96L^3KM^2)m+16L^4M^2-48L^2KM^3-18LM^5].$$

Es ist m eine Wurzel der Gleichung (15). Folglich verschwindet der erste Faktor und mit ihm das Produkt.

Drittens setzen wir $x_1=a_2$, $x_2=-a_1$ in (19) ein, formen um und erhalten:

$$9(m_1-m_2)^2\{3M[m_1+m_2+m_1^2m_2^2][(m_1+m_2)(D-K)$$
$$+m_1m_2M]-3KM[m_1^2+m_1m_2+m_2^2]+3LM[m_1+m_2$$
$$+m_1^2m_2^2]+3L[m_1^2+m_1m_2+m_2^2][(m_1+m_2)(K-D)$$
$$-m_1m_2M]+[M+m_1m_2(m_1+m_2)M-(m_1^2+m_1m_2$$
$$+m_2^2)(K-D)]^2\}.$$

Wenn wir hier die Ausdrücke (8) einsetzen und die Identität (12) benutzen, so bekommen wir:

$$\frac{1}{64\,L^6M^2}\{128\,L^6M^4m^6+(384\,L^8M^2-192\,L^6KM^3-480\,L^5M^5)m^5$$
$$+(672\,L^5KM^4-1152\,L^7M^3+768\,L^4M^6)m^4+(992\,L^6M^4$$
$$-816\,L^4KM^5-648\,L^3M^7)m^3+(480\,L^6KM^3-144\,L^4K^2M^4$$
$$-360\,L^3KM^6-384\,L^8M^2-96\,L^5M^5+288\,L^3KM^6$$
$$+288\,L^2M^8)m^2+(288\,L^3K^2M^5-816\,L^5KM^4+36\,L^2KM^7$$
$$+576\,L^7M^3-48\,L^4M^6-54\,LM^9)m+72\,L^3M^7-54\,LKM^5$$
$$-144\,L^2K^2M^6+168\,L^4KM^5+32\,L^6M^4\}.$$

Dieser Ausdruck ist auch zerlegbar in:

$$\frac{1}{64\,L^6M^2}[4\,L^2M^3-6\,LMm^2+3\,M^2m+3\,KM-4\,L^2]$$
$$+[32\,L^4M^4m^3+(96\,L^6M^2-48\,L^4KM^3-72\,L^3M^5)m^2$$
$$+(96\,L^3KM^4-144\,L^5M^3+6\,L^2M^6)m-(18\,LM^7$$
$$+48\,L^2KM^5+8\,L^4M^4)].$$

Wie oben ist der erste Faktor gleich Null.

Die drei Gleichungen (18) haben paarweise eine gemeinsame Lösung und liefern vier verschiedene Lösungen, welche mit der bekannten fünf Lösungen des Problems bilden. Wir haben hier vorausgesetzt, daß weder L noch M Null ist. Ist aber M Null, so wird die Gleichung (15)

$$m^3-1=0$$

sein und diesen Fall haben wir schon ausgeschlossen. Ist L Null, M aber nicht Null, so ist $K=\frac{D}{2}$ wegen der Identität (12). Diesen Fall werden wir später betrachten und werden finden, daß die Gleichung (10) dann eine vierfache Wurzel hat.

Das Verschwinden von J ist also eine hinreichende Bedingung dafür, daß das Problem nur fünf Lösungen hat.

III.

Die Koeffizienten der Hesseschen Form von der Gleichung II, 10 sind:

$$2E - \frac{D^2}{4}$$

$$5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}$$

$$-6\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2$$

$$-\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)\left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)$$

$$-3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 - \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2.$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß sie alle verschwinden, sind:

$$2E - \frac{D^2}{4} = 0 \tag{1}$$

$$5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} = 0. \tag{2}$$

Wir haben:

$$2E - \frac{D^2}{4} = -L(N - M) - \left(K - \frac{D}{2}\right)^2 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} &= -3L(N - M)\left(K - \frac{D}{2}\right) \\ &\quad -(M - \tfrac{1}{4}N)(N - M)^2 - 2\left(K - \frac{D}{2}\right)^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn $N - M$ und L und daher $K - \frac{D}{2}$ gleich Null sind, so verschwinden diese Ausdrücke, und die Bedingungen (1) und (2) werden erfüllt. Die Gleichung II, 10 hat eine vierfache Wurzel, wie wir schon bemerkt haben.

Die Koeffizienten der Hesseschen Form von Gleichung II, 7 sind:

$$(5)\quad \begin{cases} -L(N-M)-\left(K-\frac{D}{2}\right)^2 \\ (M-\frac{1}{4}N)(N-M)^2+L\left(K-\frac{D}{2}\right) \\ (2D-K)(N-M)+2\left(K-\frac{D}{2}\right)(M-\frac{1}{4}N)-3L^2 \\ \left(K-\frac{D}{2}\right)(2D-K)+L(M-\frac{1}{4}N) \\ -L(2D-K)-(M-\frac{1}{4}N)^2. \end{cases}$$

Hat nun die Gleichung in σ eine vierfache Wurzel, so verschwindet dieser erste Koeffizient wegen der Gleichung (3). Ist $N-M=0$, so ist $K-\frac{D}{2}=0$ und also $L=0$ wegen der Identität II, 12. Wir haben wieder denselben Fall, der uns schon einmal begegnet ist. Die Gleichung für m wird $Mm+K=0$ sein. Sie hat nur eine Wurzel, und es gibt nur zwei Werte für ξ' und nur drei Lösungen des Problems.

Ist aber $N-M$ nicht gleich Null, so entsteht die Form II, 10 aus der Form II, 1 durch lineare Transformation mit nichtverschwindender Determinante. Die Hesseschen Formen dieser zwei Formen verschwinden also gleichzeitig.

Hat also die Gleichung in σ eine vierfache Wurzel, so hat auch die Gleichung in m eine solche, wenn $N-M$ nicht Null ist. Auf jedem Falle hat das Problem nur drei Lösungen. Aber zwei von diesen fallen immer zusammen, und daher hat das Problem eigentlich nur zwei Lösungen. Nun fallen zwei Lösungen zusammen, wenn für einen Wert von m das entsprechende z nur einen Wert hat, d. h., wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in II (6):

$$4(1-m^3)(f-\xi^2+m\eta^2)+3(\xi-m^2\eta)^2$$

identisch verschwindet. Setzen wir der Reihe nach x_1, x_2

gleich $\xi_2, -\xi_1$; $\eta_2, -\eta_1$; $a_2, -a_1$ ein, so bekommen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(13)\quad 4(1-m^3)(K+mN)+3m^4N=0$$

$$(14)\quad 4(1-m^3)(M-N)+3N=0$$

$$(15)\quad 4(1-m^3)(D-K+mM)+3(K-2m^2L+m^4M)=0.$$

Zwei Lösungen fallen auch zusammen, wenn ein Wert von z Null ist. Dies ist der Fall, wenn der Ausdruck $f-\xi^2+m\eta^2$ identisch verschwindet, und wir bekommen wie oben folgende Bedingungen dafür:

$$(16)\quad \begin{cases} K+mN=0 \\ M-N=0 \\ D-K+mM=0. \end{cases}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß entweder die Bedingungen (13) bis (15) oder die Bedingungen (16) erfüllt werden, wenn σ eine vierfache Wurzel ist. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $N-M$ Null oder nicht Null ist. Ist $N-M=0$, dann ist auch L und $K-\frac{D}{2}$ Null und m hat nur einen Wert, nämlich $-\frac{K}{M}$. Unter diesen Umständen sind die Bedingungen (16) erfüllt. Ist $N-M$ nicht Null, so hat die Gleichung II, 7 auch eine vierfache Wurzel, nämlich $m=\frac{\frac{D}{2}-K}{N-M}$. Wegen des Verschwindens der Koeffizienten (5) finden wir:

$$m^2=\left(\frac{\frac{D}{2}-K}{N-M}\right)^2=-\frac{L}{N-M}$$

$$m^3=\left(\frac{\frac{D}{2}-K}{N-M}\right)^3=-\frac{M-\frac{1}{4}N}{N-M}$$

$$1-m^3=\frac{3N}{4(N-M)}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (13) bis (15) ein, so finden wir, daß (14) identisch verschwindet und daß (13) und (15) folgende Resultate geben:

$$N\left[L^2 + \frac{DN}{2} - KM\right] = 0$$

$$\left(N - \frac{M}{2}\right)[DN - 2KM + 2L^2] = 0.$$

Diese Gleichungen sind Identitäten wegen II, 12.

IV.

Das Problem kann auch in zwei speziellen Fällen drei Lösungen haben. Es hat drei Lösungen, wenn:

(a) die Gleichung für m zwei Wurzeln hat und jeder nur ein Wert von z entspricht;

(b) wenn diese Gleichung nur eine Wurzel hat, die zwei Werte von z aber nicht zusammenfallen und weder der eine noch der andere Null ist;

(c) wenn η_x verschwindet.

Fall (a). Wenn wir die Gleichung III, 13 mit $-M$ und die Gleichung III, 15 mit N multiplizieren und addieren, so bekommen wir:

$$[4(D-K)N - MK]m^3 + 6LNm^2 + 4MK - 4DN + KN = 0$$

und wenn wir zwischen dieser Gleichung und der Gleichung III, 14 das letzte Glied eliminieren, so erhalten wir:

$$3N(DN - 2KM)m^3 + 6LN(4M - N)m^2 = 0$$

oder

$$LNm^2[Lm - 4M + N] = 0. \tag{1}$$

$m = 0$ ist keine Lösung der Gleichung III, 13 bis 15, wenn nicht $K = D = L = 0$ und $4M - N = 0$ sind. Sind diese Invarianten aber Null, so hat die Gleichung II, 10 eine vierfache Wurzel. Also hat die Gleichung (1) nur eine Wurzel; d. h. wenn die Gleichung (7) für m zwei Wurzeln hat, gibt es nicht mehr als einen Wert von m, für welchen z ein Quadrat

ist. Es müssen also für einen Wert von m die Bedingungen III, 16 erfüllt werden. Erstens muß dann $N - M = 0$ sein und zweitens muß m den Gleichungen

$$K + mM = 0$$
$$D - K + mM = 0$$

genügen. Ist M nicht Null, so ist die Bedingung, daß diese Gleichungen eine Lösung haben, $D - 2K = 0$. Daraus folgt, daß L Null ist. Also die drei ersten Koeffizienten der Gleichung in m verschwinden, und die Gleichung hat nur eine Wurzel.[1]) Ist aber M und daher N Null, so ist L auch Null und die Gleichung in m hat immer drei Wurzeln.

Eine Ausnahme tritt ein, wenn L und $4M - N$ verschwinden, denn dann ist m nicht durch die Gleichung (1) bestimmt. Aber wenn $L = 0$ und $N = 4M$ sind, so ist $M(2D - K) = 0$ wegen der Gleichung II, 12. Ist $2D - K$ nicht Null, so muß M und daher N Null sein. Dann, da j verschwinden muß, wird $K - \frac{D}{2}$ Null sein. Nur der letzte Koeffizient der Gleichung II, 7 bleibt stehen, und die Gleichung hat eine vierfache unendliche Wurzel. Ist $2D - K = 0$, so hat II, 7 die dreifache Wurzel $m = 0$, ein Fall, den wir schon einmal betrachtet haben. Der Fall (a) ist also nicht möglich.

Fall (b). Die Gleichung II, 7 hat nur eine endliche Wurzel, wenn

1. sie eine vierfache Wurzel hat,
2. die drei ersten Koeffizienten verschwinden,
3. der erste Koeffizient verschwindet und die Gleichung, welche übrig bleibt, eine dreifache Wurzel hat,
4. die zwei ersten Koeffizienten verschwinden und die Gleichung, welche übrig bleibt, eine Doppelwurzel hat,
5. nur ein Glied, eine Potenz von m, stehen bleibt.

In den Fällen 1) und 2) haben wir schon bewiesen, daß wir nur zwei Lösungen haben.

---

[1]) Wir zählen hier nur endliche Wurzeln.

Im Falle (3) ist die Gleichung für m

$$4\left(K-\frac{D}{2}\right)m^3-6Lm^2+3Mm+2D-K=0.$$

Die Bedingungen für eine dreifache Wurzel sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} 4\left(K-\frac{D}{2}\right)M-4L^2=0 \\ 2\left(K-\frac{D}{2}\right)(2K-D)+LM=0 \\ 2L(2D-K)+M^2=0. \end{cases}$$

Die erste Bedingung ist die Identität II, 12, und ihretwegen sind die zwei letzten Bedingungen nicht von einander unabhängig.

Da $K-\frac{D}{2}$ nicht Null ist, so können die Bedingungen (13) bis (15) nicht erfüllt werden; denn sind diese erfüllt, so muß $\frac{4M-N}{L}=\frac{3M}{L}$ die dreifache Wurzel sein. Dafür ist erforderlich, daß die Proportion

$$L^3:3L^2M:9LM^2:27M^3=4\left(K-\frac{D}{2}\right):2L:-M:2D-K$$

stattfindet. Daraus folgt $L^2=6M\left(K-\frac{D}{2}\right)$. Wir haben aber $L^2=M\left(K-\frac{D}{2}\right)$ [vgl. II, 12]. Also muß L und M und aus den Bedingungen (2) auch $2D-K$ Null sein; das ist der Fall (5).

Der Fall (4) kann nicht vorkommen, da II, 7 nie eine Doppelwurzel hat.

Unter (5) haben wir folgende Fälle:

$\alpha)$ $K=D=L=M-\frac{1}{4}N=0$

$\beta)$ $N-M=L=M-\frac{1}{4}N=2D-K=0$

$\gamma)$ $N-M=K-\frac{D}{2}=M-\frac{1}{4}N=2D-K=0$

$$\delta)\ N - M = K - \frac{D}{2} = L = 2D - K = 0,$$

immer mit der Wurzel $m = 0$.

Im Falle α) sind die Bedingungen III, 13 bis 15, und in δ) die Bedingungen III, 16 erfüllt. Der Fall γ) ist überhaupt nicht möglich; denn diese Gleichungen haben zur Folge, daß L auch Null ist.

β) ist auch unmöglich; denn wenn $(\xi\eta)^2$ und $(a\eta)^2$ Null sind, und wenn der Fall, wo η_x identisch verschwindet, bei Seite gelassen wird, so muß auch $(a\xi)^3$ oder K Null sein. Aber mit K und $2D - K$ muß D selbst Null sein; deshalb bleibt kein Glied der Gleichung im m stehen.

Fall c) Verschwindet η_x, so sind N, L und M Null und die Gleichung in m ist:

$$2\left(K - \frac{D}{2}\right)m^3 + 2D - K = 0.$$

Es gibt drei Werte von m, aber bloß einen von m^3, und nur m^3 kommt in Betracht, denn die Gleichung für z ist:

$$z^2(1 - m^3) + 3\xi z + 3(\xi^2 - f) = 0.$$

Es gibt also nur zwei Werte von z und drei Lösungen des Problems.

Also nur in zwei Fällen, b, 3 und c, können wir drei Lösungen haben. Die Bedingungen für b, 3 sind $N - M = 0$ und $M^2 + 4DL - 2KL = 0$. Die Bedingungen für c) sind $N = M = L = 0$. c) erscheint also als spezieller Fall von b, 3, aber eigentlich ist es derselbe Fall, wie wir später sehen werden.

In beiden Fällen finden wir:

$$4\left(2E - \frac{D^3}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0$$

und auch

$$4F = K^3 - 4DK^2 + 4D^2K$$
$$2E = -K^2 + DK$$
$$4R = 2K^3 - 3DK^2,$$

und daraus folgt, wenn wir K eliminieren:

$$D^2F + D^2R - 2D^3E + 4EF - 2ER - 5DE^2 = 0.$$

Ein spezieller Fall von b, 3 und c) kommt vor, wenn $2D - K = 0$ ist. Dann haben wir anstatt der letzten Bedingung die zwei folgenden:

$$F = 0 \text{ und } R + DE = 0.$$

Hat das Problem zwei Lösungen, so kommt einer der Fälle 1), 2), 5, α) oder 5, δ) vor. Im Falle 1) verschwinden die Koeffizienten III, 5 und damit $2E - \frac{D^2}{4}$ wegen der Beziehung III, (3). Wenn wir den ersten Koeffizienten mit $2\left(K - \frac{D}{2}\right)^2$ und den zweiten mit $-(N - M)$ multiplizieren und dann addieren, so bekommen wir:

$$-3L(N-M)\left(K-\frac{D}{2}\right) - (M - \tfrac{1}{4}N)(N-M)^2$$
$$-2\left(K-\frac{D}{2}\right)^3 = 0.$$

Also verschwindet $5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}$ wegen der Gleichung III, (4) und die Gleichung in σ hat auch eine vierfache Wurzel. Auch in den Fällen 2), 5, α) und 5, δ) verschwinden diese Ausdrücke. Also sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß das Problem nur zwei Lösungen hat:

$$2E - \frac{D^2}{4} = 0 \qquad 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} = 0,$$

d. h., daß σ eine vierfache Wurzel ist.

Diese zwei Lösungen können zusammenfallen, wenn die Gleichung III, 7 nur eine Lösung hat und alle die Bedingungen (13) bis (16) erfüllt werden. Es muß daher $N - M = 0$ sein, und daraus folgt, daß $N = M = K = L = D = 0$ sind, wenn m eine endliche Wurzel ist. Aber unter diesen Umständen verschwindet die Gleichung II, 7 identisch und m ist unbestimmt. Wir haben eine Lösung nur in dem Falle, daß $m = \infty$ eine vierfache Wurzel ist, d. h., wenn

$$N = M = K - \frac{D}{2} = L = 0$$

sind.

V.

Zunächst werden wir den Fall betrachten, wo φ ein vollständiger Kubus ist. Dann verschwinden identisch Δ, Q, Ω, G und E ist gleich Null. Die Gleichung I, 19 verschwindet identisch, und die Gleichungen I, 12 haben also eine gemeinsame Lösung, was auch immer ξ_1 und ξ_2 für Werte sein mögen. Das kann man auch daraus ersehen, daß $\Delta = Q = 0$ ist. Daher haben die beiden Gleichungen die Wurzel $\lambda = \infty$. Wir wollen aber keine solche Lösung. Die Gleichungen I, 12 sind jetzt:

$$(1) \qquad \begin{cases} 4\,\Theta\lambda - f^2 = 0 \\ 12\,p\varphi\lambda^2 - 4\,\varphi^2 + f^3 = 0. \end{cases}$$

Ihre Resultante ist

$$4\,f^3\,\Theta^2 + 16\,\Theta^2\varphi^2 - 3\,p\varphi f^4$$

oder, da

$$\Theta^2 = pf\varphi - \tfrac{1}{2}D\varphi^2$$

ist:

$$p\varphi f^4 + 16\,pf\varphi^3 - 2\,D\varphi^2 f^3 - 8\,D\varphi^4.$$

Wir können durch φ dividieren und bekommen eine homogene Gleichung neunten Grades für ξ:

$$(2) \qquad pf^4 + 16pf\varphi^2 - 2\,D\varphi f^3 - 8\,D\varphi^3 = 0.$$

Aber $\varphi = a_x^3$ ist ein Kubus und die vier a sind also wirkliche Koeffizienten. p ist gleich $(a\,a)^2(a\,\xi)$, und wir können (2)

durch $(a\,\xi)$ dividieren und erhalten so eine Gleichung achten Grades. Wir haben wahrscheinlich nur acht Lösungen des Problems, aber als wir die Gleichung I, 11 aufgestellt hatten, hatten wir durch ξ_x dividiert, also vorausgesetzt, daß $\xi_x = 0$ keine Lösung wäre. Dann und nur dann, wenn φ ein Kubus ist, ist dies nicht der Fall. $\xi_x = 0$ ist eine Lösung und zwar gibt sie mit den acht Lösungen der Gleichung (2) die neun Lösungen.

Im Falle, wo φ ein Kubus ist, hat die Gleichung II, 10 die Gestalt:

$$\sigma^4 - \frac{3\,D^2}{2}\,\sigma^2 + (D^3 - 16\,F)\,\sigma - \frac{3\,D^4}{16} = 0. \tag{3}$$

Sie hat im allgemeinen vier verschiedene Wurzeln. Sie hat eine Doppelwurzel, dann und nur dann, wenn $i^3 - 6j^2$ gleich Null ist oder, was dasselbe ist, wenn j gleich Null ist. Aber dann hat sie auch eine dreifache Wurzel; hier ist:

$$j = 12\,F(D^3 - 8\,F).$$

Die Resultante von f und φ ist gleich $F - 2\,DE = F$; denn E ist gleich Null. F kann also nicht Null sein, weil wir den Fall, wo f und φ einen gemeinschaftlichen Teiler haben, ausgeschlossen haben. Ist $D^3 - 8\,F = 0$, so hat (3) die Gestalt:

$$\sigma^4 - \frac{3\,D^2}{2}\,\sigma^2 - D^3\,\sigma - \frac{3\,D^4}{16} = 0.$$

Diese Gleichung hat die dreifache Wurzel $\sigma = -\frac{D}{2}$ und die einfache Wurzel $\sigma = \frac{3\,D}{2}$.

Nehmen wir $\xi_x = 0$ als die bekannte Lösung an, dann ist $\eta_x = \sqrt[3]{2}\,a_x$, $N = 0$, $M = \sqrt[3]{4}\,(a\,a)^2$, $K = 0$. Wir haben $F = (a\,p)^2 = (a\,a)^2\,(b\,a)^2\,(c\,a)^2$ und also $D = 2\,\varepsilon\sqrt[3]{F} = 2\,\varepsilon\,(a\,a)^2$.

Entsprechend der Wurzel $\sigma = -\frac{D}{2}$ haben wir $m = -\varepsilon\sqrt[3]{2}$ und

(4) $$\xi' = z = \varepsilon^2 a_x \pm \sqrt{a_x^2 - \varepsilon a_x^2}.$$

Entsprechend der Wurzel $\sigma = \frac{3D}{2}$ haben wir $m = \varepsilon \sqrt[3]{2}$ und

(5) $$\xi' = z = -\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\,\varepsilon^2 a_x \pm \sqrt{\varepsilon a_x^2 - a_x^2}).$$

Sind die Koeffizienten von f und φ reell, so wird $\varepsilon = 1$ sein und zwei Lösungen von ξ' werden reell und zwei imaginär sein. Wollen wir in diesem Falle auch von neun Wurzeln sprechen, so müssen wir die zwei Lösungen (4) als dreifache ansehen. Die Richtigkeit dieser Behauptung bestätigt auch die Gleichung (2), welche, wenn wir die Werte von D und p einsetzen, lautet:

$$(a\,a)^2\,(a\,\xi) f^4 + 16\,(a\,a)^2\,(a\,\xi)^7 f - 4\,\varepsilon\,(a\,a)^2\,(a\,\xi)^3 f^3 - 16\,\varepsilon\,(a\,a)^2\,(a\,\xi)^9 = 0$$

oder wenn wir durch $(a\,a)^2\,(a\,\xi)$ dividieren,

$$f^4 - 4\,\varepsilon f^3\,(a\,\xi)^2 + 16 f\,(a\,\xi)^6 - 16\,\varepsilon\,(a\,\xi)^8 = 0$$

oder

$$[f - 2\,\varepsilon\,(a\,\xi)^2]^3\,[f + 2\,\varepsilon\,(a\,\xi)^2] = 0.$$

Wir haben also vier verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, von denen wir zwei als dreifache Lösungen ansehen müssen.

Die Bedingung, daß (3) eine vierfache Wurzel hat, ist, daß ihre Hessesche Form identisch verschwindet. Der erste Koeffizient dieser Form ist $-\frac{D^2}{4}$ und, da $D \neq 0$ ist, kann die Bedingung nicht erfüllt werden.

Wir werden jetzt eine andere Methode betrachten, welche die Gruppierung der Lösungen besser zeigt und welche die Lösungen gibt, ohne eine Lösung als bekannt vorauszusetzen.

VI.

Ist ξ, ξ', ξ'' ein System konjugierter Lösungen, so können wir schreiben:

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta = m(\xi + t) \\ \eta' = m\,\varepsilon\,(\xi' + t) \\ \eta'' = m\,\varepsilon_1\,(\xi'' + t). \end{cases}$$

t_x ist eine lineare Form. Es muß nach I, 1 die Gleichung

$$(2) \qquad \xi^3 - 3f\xi + 2\varphi = m^3(\xi + t)^3$$

oder

$$(1 - m^3)\xi^3 - 3m^3 t\xi^2 - 3(f + m^3 t^2)\xi + 2\varphi - m^3 t^3 = 0$$

die drei in x rationalen Lösungen ξ, ξ', ξ'' haben. Die Summe dieser drei Wurzeln ist gleich $\dfrac{3m^3 t}{1 - m^3}$ oder

$$(3) \qquad \xi + \xi' + \xi'' = \frac{3m^3 t}{1 - m^3}.$$

Wenn μ_x, ν_x unbestimmte lineare Formen und $1, \varkappa, \varkappa^2$ die dritten Einheitswurzeln sind, so können wir ξ, ξ' und ξ'', weil $1 + \varkappa + \varkappa^2 = 0$ ist, folgende Gestalt geben:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{m^3 t + \mu + \nu}{1 - m^3} \\ \xi' = \dfrac{m^3 t + \varkappa\mu + \varkappa^2\nu}{1 - m^3} \\ \xi'' = \dfrac{m^3 t + \varkappa^2\mu + \varkappa\nu}{1 - m^3}. \end{cases}$$

Dann ist nach (1):

$$(5) \qquad \eta = m\,\frac{t + \mu + \nu}{1 - m^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Wir setzen (4) in (2) ein und bekommen:

$$A + B(\mu + \nu) = 0$$
$$A + B(\varkappa\mu + \varkappa^2\nu) = 0$$
$$A + B(\varkappa^2\mu + \varkappa\nu) = 0,$$

wenn wir der Bequemlichkeit halber

$$A = 2\varphi(1-m^3)^2 + \mu^3 + \nu^3 - 3(1-m^3)fm^3t - m^3t^3(1+m^3)$$
$$B = 3[\mu\nu - f(1-m^3) - m^3t^2]$$

setzen.

Daraus folgt ohne weiteres $A = B = 0$ oder

$$(6)\quad \begin{cases} 2\varphi(1-m^3)+\mu^3+\nu^3-3(1-m^3)m^3ft - m^3(1+m^3)t^3 = 0 \\ \mu\nu - (1-m^3)f - m^3t^2 = 0. \end{cases}$$

Nach II, 8 ist $m = \dfrac{\dfrac{D}{2} - \varkappa - \sigma}{N - M}$ oder anders geschrieben:

$$m(\xi\eta)^2 - m(a\eta)^2 = \frac{D}{2} - (a\xi)^2 - \sigma.$$

Wir führen in diese Gleichung die Ausdrücke für ξ und η aus (4) und (5) ein und erhalten:

$$(a\xi)^2 = \left(\frac{m^3(at)+(a\mu)+(a\nu)}{1-m^3}\right)^2$$

$$(a\eta)^2 = m^2\left(\frac{(at)+(a\mu)+(a\nu)}{1-m^3}\right)^2$$

$$(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x_1} & \frac{\partial\xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta}{\partial x_2} \end{vmatrix}^2 = \left[\frac{m(m^3-1)((t\mu)+(t\nu))}{(1-m^3)^2}\right]^2 = \frac{m^2((t\mu)+(t\nu))^2}{(1-m^3)^2},$$

also:

$$m^3[(t\mu)+(t\nu)]^2 - m^3[(at)+(a\mu)+(a\nu)]^2 = (1-m^3)^2\left(\frac{D}{2}-\sigma\right) - [m^3(at)+(a\mu)+(a\nu)]^2.$$

Ähnlich ist

$$m^3[\varkappa(t\mu)+\varkappa^2(t\nu)]^2 - m^3[(at)+\varkappa(a\mu)+\varkappa^2(a\nu)]^2$$
$$= (1-m^3)^2\left(\frac{D}{2}-\sigma\right) - [m^3(at)+\varkappa(a\mu)+\varkappa^2(a\nu)]^2$$

und

$$m^3[\varkappa^2(t\mu)+\varkappa(t\nu)]^2-m^3[(at)+\varkappa^2(a\mu)+\varkappa(a\nu)]^2$$
$$=(1-m^3)^2\left(\frac{D}{2}-\sigma\right)-[m^3(at)+\varkappa^2(a\mu)+\varkappa(a\nu)]^2.$$

Nun ist $1+\varkappa+\varkappa^2=0$ und wenn wir diese drei Gleichungen addieren, so bekommen wir:

$$2m^3(t\mu)(t\nu)-m^3(1-m^3)(at)^2+2(1-m^3)(a\mu)(a\nu)$$
$$-(1-m^3)^2\left(\frac{D}{2}-\sigma\right)=0. \tag{7}$$

Wir werden jetzt μ, ν und m eliminieren. Wir setzen in die zweite Gleichung (6) x_1, x_2 gleich t_2, $-t_1$ und hernach gleich a_2, $-a_1$ und haben:

$$(\mu t)(\nu t)-(at)^2(1-m^3)=0$$
$$(a\mu)(a\nu)-D(1-m^3)-m^3(at)^2=0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir (7) in folgende Gleichung umformen:

$$m^3(1-m^3)(at)^2+2(1-m^3)[(1-m^3)D+m^3(at)^2]$$
$$-(1-m^3)^2\left(\frac{D}{2}-\sigma\right)=0 \tag{8}$$

oder

$$3m^3(at)^2+(1-m^3)\left(\frac{3D}{2}+\sigma\right)=0. \tag{9}$$

Wir können den Gleichungen (6) folgende Gestalt geben:

$$\begin{cases}2\varphi(1-m^3)^2=m^3(1-2m^3)t^3-\mu^3-\nu^3+3m^3\mu\nu t\\(1-m^3)f=\mu\nu-m^3t^2.\end{cases} \tag{10}$$

Wir schieben die zwei Seiten dieser Gleichungen zweimal übereinander und bekommen:

$$2(1-m^3)^3p=m^3(1-4m^3)(t\mu)(t\nu)t+m^3\{\mu(t\mu)^2+\nu(t\nu)^2-2t(\mu\nu)^2\}$$

oder wenn wir $x_1=t_2$, $x_2=-t_1$ einsetzen:

$$2(1-m^3)(pt)=m^3\{(\mu t)^3-(\nu t)^3\}. \tag{11}$$

Aus der ersten Gleichung (10) haben wir:

$$2(at)^3(1-m^3)^2=-(\mu t)^3-(\nu t)^3. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt:

$$(13) \qquad (1 - m^3)(pt) - m^3(at)^3$$

und aus (9) und (13) können wir m eliminieren und bekommen:

$$(14) \qquad 3(at)^2(pt) \quad (at)^3\left\{\frac{3D}{2} + \sigma\right\} = 0.$$

Einem Werte von σ entspricht eine kubische Gleichung (14), welche drei Werte von $\frac{t_1}{t_2}$ und damit drei Systeme konjugierter Lösungen gibt. Es gibt also insgesamt zwölf Systeme konjugierter Lösungen, welche aus den neun Lösungen gebildet werden können. Diese zerfallen in vier Gruppen, welche den vier Wurzeln σ der Gleichung II, 10 entsprechen. Wir wenden uns jetzt der Bestimmung von μ, ν, m zu.

VII.

Wir folgen hier der Methode von Clebsch weiter, insofern es die Bedingung, daß φ ein Kubus ist, gestattet. In die zweite Gleichung VI, 10 setzen wir der Reihe nach x_1, x_2 gleich μ_2, $-\mu_1$; ν_2, $-\nu_1$; α_2, $-\alpha_1$, so haben wir:

$$(1) \qquad \begin{cases} (1 - m^3)(a\mu)^2 + m^3(t\mu)^2 = 0 \\ (1 - m^3)(a\nu)^2 + m^3(t\nu)^2 = 0 \\ (1 - m^3)(a\alpha)^2 + (a\mu)(a\nu) = 0. \end{cases}$$

Wir eliminieren m^3 aus den beiden ersten Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(t\mu)^2(a\nu)^2 - (t\nu)^2(a\mu)^2 \\ &= [(t\mu)(a\nu) + (t\nu)(a\mu)][(t\mu)(a\nu) - (t\nu)(a\mu)] = 0. \end{aligned}$$

Wir benutzen die Identität

$$(t\mu)(a\nu) - (t\nu)(a\mu) = -(at)(\mu\nu)$$

und schreiben (2) in folgender Gestalt:

$$(3) \qquad (at)(t\mu)(a\nu) + (at)(t\nu)(a\mu) = 0.$$

Wir können (3) durch die folgenden Gleichungen ersetzen:

$$(4)\qquad \begin{cases} (a\,t)(a\,\mu) + \lambda\,(t\,\mu) = 0 \\ (a\,t)(a\,\nu) - \lambda\,(t\,\nu) = 0 \end{cases}$$

und infolgedessen ist:

$$(5)\qquad \mu_i = g(a_i(a\,t) + \lambda\,t_i), \qquad \nu_i = h(a_i(a\,t) - \lambda\,t_i).$$

Von den drei Wurzeln der Gleichung VI, 14 ist eine immer:

$$(a\,t) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Die zwei anderen werden durch die Gleichung

$$(6)\qquad 3\,(a\,a)^2\,(b\,t)^2 - \left(\frac{3\,D}{2} + \sigma\right)(a\,t)^2 = 0$$

gegeben.

Wir müssen verschiedene Methoden anwenden, je nachdem wir a) die Wurzel $(a\,t) = 0$ oder b) eine der anderen betrachten. Wir werden jetzt b) und später in § VIII a) lösen.

Wir bestimmen λ auf folgende Weise. Wir wenden auf die erste Gleichung VI, 10 den Prozeß

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

und auf dieses Resultat den Prozeß

$$z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

an und erhalten:

$$12\,(1 - m^3)\,a_x a_y a_z = 6\,m^3(1 - 2\,m^3)\,t_x t_y t_z - 6\,\mu_x \mu_y \mu_z - 6\,\nu_x \nu_y \nu_z$$
$$+ 3\,m^3(\nu_x \mu_y t_z + t_x \mu_y \nu_z + \mu_x t_y \nu_z + \nu_x t_y \mu_z + \mu_x \nu_y t_z + t_x \nu_y \mu_z).$$

Wir setzen hier x_1, x_2 gleich t_2, $-t_1$; y_1, y_2 gleich μ_2, $-\mu_1$ und z_1, z_2 gleich ν_2, $-\nu_1$ ein und bekommen

$$12\,(1 - m^3)(a\,t)(a\,\mu)(a\,\nu) = (\nu\,t)(t\,\mu)(\mu\,\nu) + (\mu\,t)(\nu\,\mu)(t\,\nu)$$

oder, da $(a\,t)$ nicht Null ist:

$$(7)\qquad (a\,\mu)(a\,\nu) = 0.$$

Wir führen die Werte von μ und ν aus (5) in (7) ein und erhalten

$$gh[(a\,a)(a\,t) + \lambda\,(t\,a)][(a\,a)(a\,t) - \lambda(t\,a)] = 0$$

oder

$$(8) \qquad (a\,a)(b\,a)(a\,t)(b\,t) - \lambda^2\,(t\,a)^2 = 0.$$

Nun ist:

$$(a\,a)(b\,t) + (a\,b)(a\,t) + (b\,a)(a\,t) = 0,$$

also:

$$(a\,a)(b\,t)(b\,a)(a\,t) = \tfrac{1}{2}[(a\,a)^2\,(b\,t)^2 + (b\,a)^2(a\,t)^2 - (a\,b)^2(a\,t)^2]$$
$$= (a\,a)^2(b\,t)^2 - \frac{D}{2}(a\,t)^2.$$

Wenn wir diese Relation benutzen, können wir (8) folgendermaßen schreiben

$$(a\,a)^2\,(b\,t)^2 - \left(\frac{D}{2} + \lambda^2\right)(a\,t)^2 = 0$$

und wenn wir diese Gleichung mit (6) vergleichen, so finden wir $\lambda^2 = \frac{\sigma}{3}$.

Dann ist:

$$(9) \qquad \mu_x = g\left(a_x(a\,t) + t_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right), \quad \nu_x = h\left(a_x(a\,t) - t_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right).$$

Ist $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ eine Lösung der Gleichung (6), so können wir $t_i = \varrho\,\tau_i$ setzen. Dann lautet VI, 9:

$$(10) \qquad 3\,m^2\,\varrho^2(a\,\tau)^2 + (1 - m^3)\left(\frac{3\,D}{2} + \sigma\right) = 0.$$

Wir führen μ, ν aus (9) in VI, 10 ein und erhalten:

$$(11)\begin{cases} 2\varphi(1-m^3)^2 = m^3\,\varrho^3(1-2\,m^3)\,\tau_x^3 - g^3\,\varrho^3\left[a_x(a\tau)+\tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]^3 \\ \qquad - h^3\,\varrho^3\left[a_x(a\tau)-\tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]^3 + 3\,m^3\,g\,h\,\varrho^3\left[a_x(a\,\tau)\right. \\ \qquad \left. + \tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]\left[a_x(a\,\tau) - \tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right] \\ (1-m^3)\,f = g\,h\,\varrho^2\left[a_x(a\tau)+\tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]\left[a_x(a\tau)-\tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right] - m^3\,\varrho^3\,\tau_x^2. \end{cases}$$

Setzen wir in die zweite Gleichung $x_1 = \tau_2$, $x_2 = -\tau_1$, so bekommen wir:

$$(12) \qquad (1-m^3) f' = \varrho^2 g h f'^2,$$

wo

$$f' (a\tau)^2$$

bedeutet.

Die erste Gleichung läßt sich auf folgende Weise zerlegen. Wir setzen $\zeta_x = a_x (a\tau)$. Dann ist:

$$(\zeta\tau) = (a\tau)^2 = f' \text{ und } (\zeta\tau) a_x = (a\tau)\zeta_x - (a\zeta)\tau_x,$$

also:

$$\varphi f'^3 = ((a\tau)\zeta_x - (a\zeta)\tau_x)^3.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in (11) einführen, so ist:

$$2(1-m^3)^2 \{(a\tau)^3\zeta_x^3 - 3(a\tau)^2(a\zeta)\zeta_x^2\tau_x + 3(a\tau)(a\zeta)^2\zeta_x\tau_x^2 - (a\zeta)^3\tau_x^3\}$$
$$= f'^3\varrho^3\left\{m^3(1-2m^3)\tau_x^3 - g^3\left[\zeta_x + \tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]^3 - h^3\left[\zeta_x - \tau_x\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right]^3 \right.$$
$$\left. - 3m^3 g h \tau_x\left[\zeta_x^2 - \frac{\sigma}{3}\tau_x^2\right]\right\}.$$

Diese Identität in ζ_x und τ_x zerfällt in die folgenden vier Gleichungen:

$$(13) \begin{cases} 2(1-m^3)^2(a\tau)^3 = -f'^3\varrho^3(g^3+h^3), \\ -6(1-m^3)^2(a\tau)^2(a\zeta) = f'^3\varrho^3\left[-3(g^3-h^3)\frac{\sigma}{3} + 3m^3 g h\right], \\ 6(1-m^3)^2(a\tau)(a\zeta)^2 = f'^3\varrho^3\left[-3(g^3+h^3)\frac{\sigma}{3}\right], \\ -2(1-m^3)^2(a\zeta)^3 \\ = f'^3\varrho^3\left[m^3(1-2m^3) - (g^3-h^3)\frac{\sigma}{3}\sqrt{\frac{\sigma}{3}} - 3m^3 g h\cdot\frac{\sigma}{3}\right]. \end{cases}$$

Nun ist

$$(a\tau)^2(a\zeta) = -(a\tau)^2(aa)(a\tau) = -\Theta'$$

und

$$
\begin{aligned}
(a\zeta)^3 &= -(a\alpha)(a\tau)(b\alpha)(b\tau)(c\alpha)(c\tau)\\
&= \tfrac{1}{2}[(a\alpha)^2(b\tau)^2+(b\alpha)^2(a\tau)^2-(ab)^2(a\tau)^2](c\alpha)(c\tau)\\
&= -(a\alpha)^2(b\tau)^2(c\alpha)(c\tau)+\tfrac{1}{2}(ab)^2(a\tau)^2(c\alpha)(c\tau)\\
&= (pc)(c\tau)(b\tau)^2+\tfrac{1}{2}D(c\alpha)(c\tau)(a\tau)^2 = -q'f'+\frac{D}{2}\Theta'.
\end{aligned}
$$

Also gestalten sich die ersten beiden und die letzte Gleichung von (13) wie folgt:

$$2(1-m^3)^2\varphi' = -f'^3\varrho^3(g^3+h^3) \tag{14}$$

$$2(1-m^3)^2\Theta' = f'^3\varrho^3\left[-(g^3-h^3)\sqrt{\frac{\sigma}{3}}+m^3gh\right] \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&2(1-m^3)^2\left(q'f'-\frac{D}{2}\Theta'\right)\\
&= f'^3\varrho^3\left[m^3(1-2m^3)-(g^3-h^3)\frac{\sigma}{3}\sqrt{\frac{\sigma}{3}}-3m^3gh\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right].
\end{aligned} \tag{16}
$$

Wir multiplizieren (15) mit $\frac{\sigma}{3}$ und ziehen das Resultat von (16) ab und bekommen:

$$
\begin{aligned}
&2(1-m^3)^2\left[q'f'-\frac{D}{2}\Theta'-\frac{\sigma}{3}\Theta'\right]\\
&= f'^3\varrho^3\left[m^3(1-2m^3)-4m^3gh\cdot\frac{\sigma}{3}\right],
\end{aligned}
$$

also

$$gh = \frac{f'^3\varrho^3m^3(1-2m^3)-2(1-m^3)^2\left[q'f'-\left(\frac{\sigma}{3}+\frac{D}{2}\right)\Theta'\right]}{4m^3f'^3\varrho^3\cdot\frac{\sigma}{3}}$$

oder, da aus (10) folgt, daß

$$\frac{\sigma}{3}+\frac{D}{2} = -\frac{m^3\varrho^2f'}{1-m^3}$$

ist,

$$
\begin{aligned}
gh = \frac{3}{4m^3\sigma f'^2\varrho^3}&[f'^2\varrho^3m^3(1-2m^3)-2(1-m^3)^2q'\\
&-2(1-m^3)m^3\varrho^2\Theta'].
\end{aligned} \tag{17}
$$

Aus (14) und (15) finden wir dann:

$$(18)\qquad g^3 = \frac{m^3 f'^3 \varrho^3 g h - 2(1-m^3)^2 \left(\Theta' + \varphi' \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right)}{2 f'^3 \varrho^3 \sqrt{\frac{\sigma}{3}}}$$

$$(19)\qquad h^3 = \frac{-m^3 f'^3 \varrho^3 g h + 2(1-m^3)^2 \left(\Theta' - \varphi' \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right)}{2 f'^3 \varrho^3 \sqrt{\frac{\sigma}{3}}}.$$

Betrachten wir ϱ und m^3 als bekannt, so können wir gh aus (17) in (18) und (19) einführen und g und h durch Wurzelziehen bestimmen.

Aus VI, 14 und (10) haben wir:

$$(20)\qquad m^3 = \frac{p'}{p' - \varrho^2 \varphi'}.$$

Wir eliminieren gh aus (12) und (17) und bekommen

$$f'^2 \varrho^3 m^3 (1-2m^3) - 2(1-m^3)^2 q' - 2(1-m^3) m^3 \varrho^2 \Theta' = \frac{4}{3} m^3 (1-m^3) \sigma \varrho f'$$

oder wenn wir den Wert von m^3 einführen und reduzieren:

$$(21)\qquad f'^2 p' \varphi' \varrho^2 + 2(\varphi'^2 q' - \varphi' p' \Theta') \varrho - 3 f'^2 p'^2 + 2 D p' f' \varphi' = 0.$$

Aber wir haben

$$p_x = (a\alpha)^2 a_x, \qquad \Theta_x = (b\beta) b_x \beta_x^2, \qquad q_x = (a\alpha)^2 (b\alpha) b_x$$

und daher:

$$\varphi q - p\Theta = (a\alpha)^2 (b\alpha) b_x \beta_x^3 - (a\alpha)^2 (b\beta) b_x a_x \beta_x^2.$$

In diesem Falle sind die α und β wirkliche Koeffizienten und können in jedem Ausdrucke gleich gesetzt werden. Also ist $\varphi q - p\Theta = 0$. Wir können die Gleichung (21) jetzt durch $f'p'$ dividieren und erhalten

$$f' \varphi' \varrho^2 - 3 f' p' + 2 D \varphi' = 0$$

oder wenn wir die Gleichung (6)

$$3f'p' = \left(\frac{3D}{2} + \sigma\right)\varphi'$$

benutzen:

(22) $$\varrho^2 = \frac{2\sigma - D}{2f'}.$$

Welche Wurzel wir nehmen müssen, läßt sich durch die Bedingung

$$g^3 \cdot h^3 - (gh)^3 = 0$$

bestimmen. Wir haben also zwei Gruppen von Lösungen, welche der Wurzel σ entsprechen, gefunden, nämlich:

$$\xi = \frac{\varrho}{1-m^3}\left[\left\{m^3 + (g-h)\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right\}\tau_x + (g+h)(a\tau)a_x\right]$$

$$\xi' = \frac{\varrho}{1-m^3}\left[\left\{m^3 + (\varkappa g - \varkappa^2 h)\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right\}\tau_x + (\varkappa g + \varkappa^2 h)(a\tau)a_x\right]$$

$$\xi'' = \frac{\varrho}{1-m^3}\left[\left\{m^3 + (\varkappa^2 g - \varkappa h)\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right\}\tau_x + (\varkappa^2 g + \varkappa h)(a\tau)a_x\right].$$

Das andere System, welches wir jetzt untersuchen werden, hängt von der Wurzel $t_i = \varrho\, a_i$ ab.

VIII.

Wir haben in § VI gefunden, daß

(1) $$\mu_x = g(a_x(at) + \lambda t_x), \quad \nu_x = h(a_x(at) - \lambda t_x)$$

ist. Wir setzen in die erste Gleichung VI, 10 der Reihe nach x_1, x_2 gleich ϱa_2, $-\varrho a_1$ und ν_2, $-\nu_1$ und haben

(2) $$(a\mu)^3 + (a\nu)^3 = 0$$

(3) $$2(a\nu)^3(1-m^3)^2 = m^3(1-2m^3)\varrho^3(a\nu)^3 - (\mu\nu)^3$$

und wenn wir in VI, 2 für t seinen Wert ϱa, einführen, haben wir:

(4) $$(1-m^3)(a\mu)^2 + m^3\varrho(a\mu)^2 = 0$$

(5) $$(1-m^3)(a\nu)^2 + m^3\varrho(a\nu)^2 = 0$$

(6) $$(1-m^3)(aa)^2 - (a\mu)(a\nu) = 0.$$

(2) gibt

$$(a\mu)^3 = -(a\nu)^3$$

oder

$$(7) \qquad (a\mu) = -\varepsilon(a\nu).$$

Wir führen die Werte von μ und ν aus (1) in (7) ein

$$g\varrho(aa)^2 = -h\varrho\varepsilon(aa)^2$$

oder

$$g = -h\varepsilon,$$

also:

$$(8) \quad \mu_x = -h\varepsilon\varrho(a_x(aa) + \lambda a_x), \quad \nu_x = h\varrho(a_x(aa) - \lambda a_x).$$

Es folgen dann unmittelbar die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} (\mu\nu) = -h^2\varrho^2\varepsilon[(ab)(aa)(ba) - 2\lambda(aa)^2] = 2h^2\varrho^2\varepsilon\lambda(aa)^2 \\ (a\mu)^2 = h^2\varrho^2\varepsilon^2[\frac{1}{2}D(aa)^2 + \lambda^2(aa)^2] \\ (a\nu)^2 = h^2\varrho^2[\frac{1}{2}D(aa)^2 + \lambda^2(aa)^2] \\ (a\mu) = -h\varrho\varepsilon(aa)^2 \\ (a\nu) = h\varrho(aa)^2. \end{cases}$$

Wenn wir (9) benutzen und reduzieren, so gehen die Gleichungen (3), (4), (6) in die folgenden über:

$$(10) \qquad 2(1-m^3)^2 = m^3(1-2m^3)\varrho^3 - 8h^3\varrho^3\lambda^3$$

$$(11) \qquad (1-m^3)\left(\frac{D}{2} + \lambda^2\right) + m^3\varrho^2(aa)^2 = 0$$

$$(12) \qquad (1-m^3) + h^2\varrho^2\varepsilon(aa)^2 = 0.$$

Wenn wir (11) mit VI, 9 vergleichen, sehen wir, daß

$$(13) \qquad \lambda^2 = \frac{\sigma}{3}$$

ist.

Aus (12) folgt

$$h^2 = -\frac{1-m^3}{\varrho^2\varepsilon(aa)^2}$$

oder wenn wir den Wert von $\varrho^2(aa)^2$ aus VI, 9 benutzen:

$$(14) \qquad h^2 = \frac{6m^3}{\varepsilon(3D + 2\sigma)}.$$

Wir können nicht wie oben den Polare-Prozeß zweimal auf die Gleichung VI, 10 anwenden; aber wir wenden ihn einmal an, setzen dann $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, $y_1 = \mu_2$, $y_2 = -\mu_1$ und bekommen:

$$(a\mu)(\mu\nu) + \varrho m^3 (a\mu)^2 = 0,$$

also

$$2h^3\varrho^3\varepsilon\lambda(aa)^4 + m^3h^2\varrho^3\varepsilon^2(aa)^4 = 0$$

oder

$$2h\lambda = -m^3\varepsilon. \tag{15}$$

Wenn wir m^3 und ϱ als bekannt ansehen, werden h und λ bis auf das Vorzeichen aus (13) und (14) bestimmt. (15) gibt das Vorzeichen des Produktes und wir brauchen h und λ nicht genauer zu kennen, denn durch eine Änderung der beiden Vorzeichen tritt nur eine Vertauschung von μ und ν ein und dies ist ohne Einfluß auf die Lösung des Problems.

Durch die Identität $h^2\lambda^2 = (h\lambda)^2$ ist m^3 eindeutig bestimmt; denn diese Identität lautet

$$\frac{m^6\varepsilon^2}{4} = \frac{2\sigma m^3}{\varepsilon(3D + 2\sigma)}$$

und daraus können wir m^3 berechnen:

$$m^3 = \frac{8\sigma}{3D + 2\sigma}. \tag{16}$$

Aus 16 und VI, 9 können wir m^3 eliminieren und bekommen:

$$\varrho^2 = -\frac{(D - 2\sigma)(3D + 2\sigma)}{16\sigma(aa)^2}. \tag{17}$$

Das Vorzeichen von ϱ läßt sich durch 10 bestimmen. Welchen Wert von ε wir nehmen, ist gleich; denn zwei verschiedene Werte geben dasselbe System von Lösungen, nur in anderer Ordnung, wie es sich durch Substitution in die Formeln für ξ, ξ', ξ'' beweisen läßt. Wir können ε gleich 1 setzen.

Wir haben den Fall, wo φ ein Kubus ist, gelöst. Wir brauchten dazu außer Wurzelziehen nur eine Wurzel einer biquadratischen Gleichung zu finden und eine quadratische Gleichung zu lösen.

IX.

Wir wollen jetzt den Fall, den wir früher in § II ausgeschlossen haben, behandeln. Die Gleichung II, 10 ist:

$$\sigma^4 - \frac{3D^2}{2}\sigma^2 + D^3\sigma - \frac{3D^4}{16} = 0.$$

Sie hat die dreifache Wurzel $\sigma = \frac{D}{2}$ und die andere Wurzel $\sigma = -\frac{3D}{2}$. Zur Lösung des Problems aber können wir die Formeln von § VII und VIII nicht anwenden; denn für $\sigma = -\frac{3D}{2}$ verschwindet die Gleichung VII, 6 identisch und für $\sigma = \frac{D}{2}$ ist der Wert von ϱ^2 unbestimmt, $\frac{0}{0}$. Aber es läßt sich leicht auf folgende Weise lösen. φ ist ein Kubus und f und φ haben einen gemeinsamen Teiler. Wir finden, daß p_x identisch verschwindet und die Gleichung V, 2 wird

$$-2D\varphi f^3 - 8D\varphi^3 = 0$$

oder

$$f^3 = -4\varphi^2. \tag{1}$$

Wir können $f = (a\xi)(b\xi)$ und $\varphi = (a\xi)^3$ einsetzen, durch $(a\xi)^3$ dividieren und bekommen:

$$(b\xi)^3 = -4(a\xi)^3, \tag{2}$$

also

$$(b\xi) = -\varepsilon \sqrt[3]{4}\,(a\xi)$$

und wenn wir diese Gleichung lösen, so ist:

$$\xi_x = \lambda[\varepsilon \sqrt[3]{4}\,a_x + b_x]. \tag{3}$$

Um λ zu bestimmen, führen wir diese ξ in die Gleichung V, 1, nämlich $4\Theta - f^2 = 0$, ein, oder, da $\Theta = \frac{1}{2}(ba)(a\xi)^3$ ist, $2(ba)(a\xi)^3 - (a\xi)^2(b\xi)^2 = 0$ oder:

$$2(ba)(a\xi) - (b\xi)^2 = 0. \tag{4}$$

Das gibt:

$$-2\lambda(b\,a)^2 - 2\sqrt[3]{2}\,\varepsilon^2\lambda^2(b\,a)^2 = 0,$$

also $\lambda = 0$ oder $\lambda = -\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{4}$.

Wir haben auf diese Weise vier Lösungen gefunden:

$$\begin{cases} \xi_x = 0 \\ \xi_x = -\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\,b_x \\ \xi_x = -\varkappa\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\varkappa^2}{2}\sqrt[3]{4}\,b_x \\ \xi_x = -\varkappa^2\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\varkappa}{2}\sqrt[3]{4}\,b_x. \end{cases}$$

Diese Lösungen können wir auch leicht aus der Gleichung I, 1 finden und zugleich zeigen, daß es keine anderen gibt. Wir setzen

$$\xi_x = m\,a_x + n\,b_x$$

und I, 1 wird dann:

$$(5)\quad (m^3+2)a_x^3 + 3(m^2 n - m)a_x^2 b_x + 3(m n^2 - m)a_x b_x^2 + n^3 b_x^3 = \eta_x^3.$$

Wenn der Ausdruck links ein vollständiger Kubus ist, so muß seine Hessesche Kovariante identisch verschwinden. Diese Kovariante ist:

$$2\{(m^3 n + 2mn^2 - 2n - m^2)a_x^2 + (2m^2 n^2 - mn + 2n^3)a_x b_x + (m n^3 - n^2)b_x^2\}.$$

Die Koeffizienten müssen sämtlich Null sein, also:

$$(6)\quad \begin{cases} m^3 n + 2m n^2 - 2n - m^2 = 0 \\ 2m^2 n^2 - mn + 2n^3 = 0 \\ m n^3 - n^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben folgende Lösungspaare

$$\begin{array}{cccc} m = 0 & m = -\sqrt[3]{2} & m = -\varkappa\sqrt[3]{2} & m = -\varkappa^2\sqrt[3]{2} \\ n = 0 & n = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} & n = -\frac{\varkappa^2}{2}\sqrt[3]{4} & n = -\frac{\varkappa}{2}\sqrt[3]{4} \end{array}$$

und wir bekommen dieselben Werte von ξ_x wie oben. Wenn wir noch von neun Lösungen sprechen wollen, so müssen wir $\xi_x = 0$ als sechsfache betrachten, wie man es mit Hilfe von § II auf folgende Weise zeigen kann. Wir nehmen $\xi_x = 0$ als die bekannte Lösung an. Dann ist:

$$\eta_x = \sqrt[3]{2}\, a_x,\ N = K = L = M = 0,\ f = a_x b_x.$$

Wir können die Gleichung II, 10 nicht benutzen, da die Transformation II, 8 nicht erlaubt ist, weil der Nenner verschwindet. II, 1 nimmt die einfache Gestalt $-2Dm^3 + 2D = 0$ an und hat die Wurzeln $m = \infty, 1, \varkappa, \varkappa^2$.

Wir können die Bedeutung der Wurzel ∞ erklären mittels der Gleichung II, 3, nämlich $\eta - \frac{\eta'}{\varepsilon} = m(\xi - \xi')$. Daraus folgt, daß sie $\xi = \xi' = 0$ ist. Das System besteht aus der Lösung $\xi_x = 0$ dreimal gezählt.

Für $m = \varepsilon$ ist:

$$z = -\frac{\varepsilon\eta^2 + f}{\varepsilon^2 \eta} = -\varepsilon^2 \sqrt[3]{2}\, a_x - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{4}\, b_x.$$

Wir haben also drei Systeme, deren jedes aus der zweifachen Lösung $\xi_x = 0$ und einer der anderen besteht.

Nehmen wir als bekannt eine der anderen Lösungen an, etwa:

$$\xi_x = -\sqrt[3]{2}\, a_x - \frac{\sqrt[3]{4}}{2} b_x,$$

dann ist:

$$\eta_x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} b_x,\ K = -(ba)^2,\ M = 0,\ N = (ba)^2,\ D = -\tfrac{1}{2}(ba)^2.$$

Für $\sigma = \frac{D}{2}$ ist $m = 1$ und

$$z = -\frac{\xi^2 - \eta^2 - f}{\xi - \eta} = \sqrt[3]{2}\, a_x + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} b_x,$$

also ist $z = -\xi_x$ und $\xi'_x = 0$.

Für $\sigma = -\frac{3D}{2}$ ist $m = 0$,

$$z = \frac{3\sqrt[3]{2}\,a_x + \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\,b_x \pm i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,b_x\right)}{2}$$

und

$$\xi_x' = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,b_x \pm i\sqrt{3}\left[\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,b_x\right]\right)$$

$$= -\sqrt[3]{2}\,a_x\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,b_x\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\xi_x' = -\varkappa\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\varkappa^2}{2}\sqrt[3]{4}\,b_x \quad \text{oder} \quad -\varkappa^2\sqrt[3]{2}\,a_x - \frac{\varkappa}{2}\sqrt[3]{4}\,b_x.$$

Also entsprechend der Wurzel $\sigma = \frac{D}{2}$ haben wir das dreimal gezählte System, welches aus dem bekannten ξ und aus $\xi_x = 0$ zweimal besteht, und das vierte System, welches sich aus den übrigen Lösungen zusammensetzt und der Wurzel

$$\sigma = -\frac{3D}{2}$$

entspricht.

X.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Falles über, wo f ein vollständiges Quadrat ist, aber f und φ keinen gemeinsamen Teiler haben. Es ist also $D = 0$. Neben der Lösung $\xi_x = 0$ haben wir acht andere durch V, 2 gegeben. In diesem Falle ist V, 2:

$$pf^4 + 16pf\varphi^2 = 0 \tag{1}$$

oder

$$(a\,\xi)^2\left[(a\,\xi)^6 + 16\,(a\,\xi)^6\right] = 0.$$

$(a\,\xi) = 0$ gibt $\xi_x = m\,a_x$ und wenn wir diesen Wert in I, 1 einsetzen, so bekommen wir:

$$(m^3 - 3\,m)\,a_x^3 + 2\,a_x^3 = \eta_x^3.$$

Die Gleichung ist dann und nur dann möglich, wenn $m = \pm\sqrt{3}$ oder 0 ist.

$$(a\,\xi)^6 + 16\,(a\,\xi)^6 = 0$$

gibt

$$\pm\, i\,(a\,\xi)^3 = 4\,(a\,\xi)^3$$

und

$$\pm\, i\,(a\,\xi) = \varepsilon\sqrt[3]{4}\,(a\,\xi),$$

also:

$$\xi_x = m\,(\pm\, i\,a_x - \varepsilon\sqrt[3]{4}\,a_x).$$

Um m zu bestimmen, führen wir diesen Wert in I, 1 ein und finden $m = 1$.

Wir haben die neun Losungen:

$$\xi_1 = 0 \qquad \xi_4 = i\,a_x - \sqrt[3]{4}\,a_x \qquad \xi_7 = -\,i\,a_x - \varkappa\sqrt[3]{4}\,a_x$$

$$\xi_2 = \sqrt{3}\,a_x \qquad \xi_5 = -\,i\,a_x - \sqrt[3]{4}\,a_x \qquad \xi_8 = i\,a_x - \varkappa^2\sqrt[3]{4}\,a_x$$

$$\xi_3 = -\sqrt{3}\,a_x \qquad \xi_6 = i\,a_x - \varkappa\sqrt[3]{4}\,a_x \qquad \xi_9 = -\,i\,a_x - \varkappa^2\sqrt[3]{4}\,a_x.$$

Mittels § II können wir die Gruppierung dieser Wurzeln herstellen. Von der Gleichung II, 10:

$$\sigma^4 - 16\,F\,\sigma = 0 \tag{2}$$

oder

$$\sigma^4 - 16\,(a\,a)^6\,\sigma = 0$$

sind die vier Wurzeln:

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 2\sqrt[3]{2}\,(a\,a)^2, \qquad \sigma_3 = 2\sqrt[3]{2}\,\varkappa\,(a\,a)^2,$$

$$\sigma_4 = 2\sqrt[3]{2}\,\varkappa^2\,(a\,a)^2.$$

Nehmen wir ξ_1 als die bekannte Lösung an, dann ist:

$$K = L = N = 0, \qquad M = (a\,a)^2\sqrt[3]{4}, \qquad \eta = \sqrt[3]{2}\,a_x.$$

Entsprechend:

σ_1 ist $m=0$, $\quad \xi'=z=\frac{3}{2}\left(\pm\frac{2a_x}{\sqrt{3}}\right)=\pm\sqrt{3}\,a_x$

σ_2 „ $m=\sqrt[3]{4}$, $\quad \xi'=z=\frac{3}{2}\,\frac{\pm 2ia_x+2\sqrt[3]{4}\,a_x}{3}=\pm ia_x-\sqrt[3]{4}\,a_x$

σ_3 „ $m=\sqrt[3]{4}$, $\quad \xi'=z=\frac{3}{2}\,\frac{\pm 2ia_x+2\varkappa^2\sqrt[3]{4}a_x}{3}=\pm ia_x-\varkappa^2\sqrt[3]{4}\,a_x$

σ_4 „ $m=\varkappa^2\sqrt[3]{4}$, $\xi'=z=\frac{3}{2}\,\frac{\pm 2ia_x+2\varkappa\sqrt[3]{4}a_x}{3}=\pm ia_x-\varkappa\sqrt[3]{4}a_x.$

Also gibt es folgende Systeme konjugierter Lösungen:

$$\xi_1\xi_2\xi_3,\quad \xi_1\xi_4\xi_5,\quad \xi_1\xi_8\xi_9,\qquad \xi_1\xi_6\xi_7.$$

Man kann 32 andere Systeme ganz wie oben berechnen. Wir machen folgende Tabelle, wo wir bloß die Indices der Lösungen schreiben. In die erste Spalte setzen wir die Lösung, welche wir als bekannt annehmen.

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	123	145	189	167
2	231	278	256	249
3	312	369	347	358
4	468	451	473	492
5	579	514	562	583
6	684	693	625	671
7	795	782	734	716
8	846	827	891	835
9	957	936	918	924

Wir sehen, daß wir zwölf verschiedene Systeme haben, nämlich:

123 145 167 189 249 256 278
347 358 369 468 und 579.

Wir sehen auch, daß jede Lösung in vier verschiedenen Systemen vorhanden ist, und daß die Systeme in vier ver-

schiedene Gruppen zerlegbar sind, in denen jede Lösung nur einmal vorkommt, nämlich:

123	468	579	der Wurzel		σ_1	gehörig
145	278	369	„	„	σ_2	„
167	249	358	„	„	σ_3	„
189	256	347	„	„	σ_4	„

Wir sehen auch, was Clebsch im allgemeinen bewiesen hat (vgl. Binäre Formen, S. 243), daß wir entsprechend einem gewissen σ immer dasselbe System bekommen, welche Lösung des Systems wir auch als bekannt wählen mögen.

XI.

Haben f und φ einen gemeinsamen Teiler, so haben sie die Gestalt $f = \alpha_x^2$, $\varphi = \alpha_x^3$. Die Gleichung V, 2 verschwindet identisch. Wir können das Problem auf folgende Weise sehr leicht lösen. Wir setzen $\xi_x = m\,\alpha_x + n\,t_x$ in I, 1 ein und bekommen:

$$(1)\quad (m^3 - 3m + 2)\alpha_x^3 + 3(m^2 n - n)\alpha_x^2 t_x + 3mn^2 \alpha_x t_x^2 + n^3 t_x^3 = \eta_x^3.$$

Die Hessesche Kovariante von (1) ist:

$$(2)\quad 2\{(6mn^2 - m^2 n^3 - n^2)\,\alpha_x^2 + (2n^3 - 2mn^3)\,\alpha_x t_x - n^4 t_x^2\}.$$

Diese verschwindet dann und nur dann, wenn n Null ist. Also ist

$$(3)\qquad \xi_x = m\,\alpha_x$$

immer eine Lösung, was auch m sein mag. Wir haben unendlich viele Lösungen, die wir nicht in Systemen oder in Gruppen anordnen können.

Wir haben hiermit den Fall, wo φ ein vollständiger Kubus ist, gänzlich gelöst.

XII.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo f ein vollständiges Quadrat ist. Wir setzen zuerst voraus, daß φ und f keinen gemeinsamen Teiler haben und daß φ keinen Doppel-

faktor hat. D ist gleich Null. Wir können wie in § II verfahren und bekommen anstatt der Gleichung (10) die folgende:

$$\sigma^4 + 12E\sigma^2 - 8(R + 2F)\sigma - 12E^2 = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat gewöhnlich vier verschiedene Wurzeln. Bloß im Falle, wo ihre Invariante j verschwindet, hat sie eine Doppelwurzel, die dann auch eine dreifache ist:

$$j = -24[8E^3 + (R + 2F)^2].$$

Ist j gleich Null, so ist (1)

$$\sigma^4 + 12E\sigma^2 \pm iE\sqrt{2}E\sigma - 12E^2 = 0$$

und die Wurzeln sind die einfache $\sigma' = \pm 3i\sqrt{2}E$ und die dreifache $\sigma'' = \mp i\sqrt{2}E$. Die Hessesche Form des Ausdruckes links in (1) ist:

$$E\sigma^4 - 2(R + 2F)\sigma^3 - 12E^2\sigma^2 + 4E(R + 2F)\sigma - 2[6E^3 + (R + 2F)^2].$$

Sie verschwindet identisch dann und nur dann, wenn $E = 0$ und $R = -2F$ ist. Dann ist (1) $\sigma^4 = 0$ und sie hat die vierfache Wurzel $\sigma = 0$. Hat die Gleichung (1) vier verschiedene Wurzeln, so hat m auch vier verschiedene Werte. die durch die Formel

$$m = -\frac{K + \sigma}{N - M}$$

gegeben sind.

Dann haben wir acht Werte von z

$$z = \frac{-3(\xi - m^2\eta) \pm \sqrt{9(\xi - m^2\eta)^2 - 12(1 - m^3)(\xi^2 - m\eta^2 - f)}}{2(1 - m^3)}$$

und acht Werte von $\xi' = \xi + z$, wo ξ eine bekannte Lösung ist.

Um die Lösung ξ zu finden, verfahren wir wie in § VI und bekommen in diesem Falle:

$$3(at)^2(pt) - (at)^3\sigma = 0. \tag{2}$$

In dieser Gleichung hat das Symbol (at) gar keine Bedeutung; aber wir können trotzdem nach der Betrachtungsweise

von § VII mit kleinen Änderungen auch hier verfahren. Wir setzen in die zweite Gleichung VI, 10 der Reihe nach x_1, x_2 gleich μ_2, $-\mu_1$ und ν_2, $-\nu_1$ ein und haben:

$$(3)\qquad \begin{cases} (1-m^3)(a\mu)^2 = -m^3(t\mu)^2 \\ (1-m^3)(a\nu)^2 = -m^3(t\nu)^2. \end{cases}$$

Wir eliminieren m^3 und bekommen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(t\mu)^2(a\nu)^2-(t\nu)^2(a\mu)^2 \\ &=[(t\mu)(a\nu)+(t\nu)(a\mu)]\,[(t\mu)(a\nu)-(t\nu)(a\mu)]=0. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$(t\mu)(a\nu)-(t\nu)(a\mu)=-(at)(\mu\nu).$$

Den Fall, wo alle Werte von σ Null sind, haben wir ausgeschlossen. Dabei zeigt uns Gleichung (2), daß (at) nicht Null sein kann. Infolgedessen läßt sich die Gleichung (4) auf folgende reduzieren

$$(t\mu)(a\nu)+(t\nu)(a\mu)=0$$

und diese durch die zwei Gleichungen (5) ersetzen:

$$(5)\qquad \begin{cases} (a\mu)+\lambda(t\mu)=0 \\ (a\nu)-\lambda(t\nu)=0. \end{cases}$$

Wir können sie für $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ und $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ lösen und bekommen:

$$(6)\qquad \mu_i=g(a_i+\lambda t_i),\qquad \nu_i=h(a_i-\lambda t_i).$$

Wenn wir die Prozesse

$$y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\quad\text{und}\quad z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

auf VI, 10 anwenden, wie in § VII, so haben wir in diesem Falle auch

$$12(1-m^3)(at)(a\mu)(a\nu)=(\nu t)(t\mu)(\mu\nu)+(\mu t)(\nu\mu)(t\nu)$$

und wenn wir die Werte (6) einführen

$$gh(at)[(aa)+\lambda(ta)]\,[(aa)-\lambda(ta)]=0$$

oder

(7) $$(a\,t)(a\,a)^2 - \lambda^2 (a\,t)^3 = 0.$$

Wenn wir (7) mit (2) vergleichen, so ist:

$$\lambda^2 = \frac{\sigma}{3\,(a\,t)^2}.$$

Schreiben wir g, h anstatt $\frac{g}{(a\,t)}$ bzw. $\frac{h}{(a\,t)}$, so nimmt μ bzw. ν die Gestalt

(8) $$\mu_x = g\left(a_x (a\,t) + t_x \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right), \quad \nu_x = h\left(a_x (a\,t) - t_x \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right)$$

an. Diese Werte sind dieselben wie VII, 9. Anstatt VII, 10 haben wir:

(9) $$3\,m^3 \varrho^2 (a\,\tau)^2 + (1 - m^3)\,\sigma = 0;$$

aber VII, (11) bis (15) gelten ohne Änderung. In (16) fällt das Glied $(1 - m^3)^2 D\Theta'$ aus, weil $D = 0$ ist, aber (17), (18) und (19) bleiben ungeändert stehen. Wir haben hier auch

(10) $$m^3 = \frac{p'}{p' - \varrho^2 \varphi'}$$

und

(11) $$\begin{aligned} f'^2 \varrho^2 m^3 (1 - 2\,m^3) - 2\,(1 - m^3)^2 q' - 2\,(1 - m^3)\,m^3 \varrho^2 \Theta' \\ = \tfrac{4}{3}\, m^3 (1 - m^3)\,\sigma\,\varrho\, f' \end{aligned}$$

oder wenn wir m^3 aus (9) und σ aus (1) einführen

(12) $$f'^2 p' \varphi' \varrho^2 + 2\,(\varphi'^2 q' - \varphi' p'\,\Theta')\,\varrho - 3 f'^2 p'^2 = 0.$$

Um ϱ eindeutig zu bestimmen, bilden wir eine andere Gleichung in ϱ^2 folgendermaßen.

Wir schreiben die Gleichungen VI, 6 in der Gestalt:

(13) $$\begin{cases} \mu\,\nu = m^3 t^2 + (1 - m^3)\,a_x^2 \\ \mu^3 + \nu^3 = m^3 (1 + m^3)\,t_x^3 + 3\,m^3 (1 - m^3)\,t_x\,a_x^2 - 2\,(1 - m^3)^2 a_x^3. \end{cases}$$

Wir schieben $\mu^3 + \nu^3$ zweimal über sich selbst, setzen $x_1 = t_2$, $x_2 = -t_1$ und bekommen

$$\begin{aligned} - m^6 (a\,t)^2 (b\,t)^2 + 4\,m^3 (1 - m^3)(\Theta t)^3 + 2\,(1 - m^3)^2 (\Delta t)^2 \\ + 2\,(a\,t)^2 [(1 - m^3)\,D^2 + 2\,m^3 (a\,t)^2] = 0 \end{aligned}$$

oder

$$m^3(4-m^3)f'^2\varrho^2 + 4m^3(1-m^3)\Theta'\varrho + 2(1-m^3)^2\Delta' + 2(1-m^3)f'D = 0. \tag{14}$$

Wir setzen den Wert von m^3 aus (10) hier ein, bemerken, daß $D = 0$ ist, und finden:

$$(2\varphi'^2\Delta' - 4p'f'^2\varphi')\varrho^2 - 4p'\varphi'\Theta'\varrho + 3p'^2f'^2 = 0. \tag{15}$$

Wir addieren (15) und (12) und dann dividieren wir durch $\varrho\varphi'$ und haben:

$$(2\varphi'\Delta' - 3p'f'^2)\varrho + 2(\varphi'q' - 3p'\Theta') = 0.$$

Also ist:

$$\varrho = -\frac{2(\varphi'q' - 3p'\Theta')}{2\varphi'\Delta' - 3p'f'^2}. \tag{16}$$

Wir haben die neun Lösungen jetzt gefunden, nämlich:

$$\xi = \frac{\varrho}{1-m^3}\left[\left\{m^3 + (\varepsilon g - \varepsilon^2 h)\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right\}\tau_x + (\varepsilon g + \varepsilon^2 h)(a\tau)a_x\right], \quad \varepsilon = 1, \varkappa, \varkappa^2,$$

wo das Verhältnis $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ eine der Wurzel der Gleichung $3(a\tau)^2(p\tau) - (a\tau)^3\sigma = 0$ und σ irgend eine Wurzel der Gleichung $\sigma^4 + 12E\sigma^2 - 8(R+2F)\sigma - 12E^2 = 0$ ist.

Der Fall, in welchem die Gleichung (1) die vierfache Wurzel $\sigma = 0$ hat, läßt sich nicht durch die Formeln von diesem Paragraphen lösen. Wir haben hier vorausgesetzt, daß (at) nicht Null ist. In unserem jetzigen Falle aber ist die Gleichung (2)

$$3(at)^2(pt) = 0 \tag{17}$$

und sie hat die zweifache Wurzel $\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1}{a_2}$ und die einfache $\frac{t_1}{t_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Nehmen wir zuerst die letzte Wurzel $t_x = lp_x$, dann zeigt die Gleichung VI, 9:

$$(1 - m^3)\left(\frac{3D}{2} + \sigma\right) = - m^3 (at)^2,$$

daß m gleich Null sein muß. Ferner zeigt die Gleichung II, 8:

$$m = \frac{\frac{D}{2} - K - \sigma}{N - M},$$

daß K gleich Null sein muß, also $(a\xi)^2 = 0$ oder $\xi_x = k a_x$. Wir kehren zu den Gleichungen I, 10 und 11 zurück

(18) $$4\Theta + 2\Delta - f^2 = 0$$

(19) $$8Q + 6f\Delta - 12p\varphi + f^3 + 4\varphi^2 = 0$$

und setzen hier $\xi_i = k a_i$ ein, um k zu bestimmen. Da $E = 0$ ist, verschwindet (18) identisch. Die Substitution in f gibt Null, in p gibt sie $k(pa) = - k(aa)^3$, in φ $- k^3 (aa)^3$. Es ist $Q^2 = - \frac{1}{2}[\Delta^3 + R\varphi^2]$ und die Substitution in Q^2 gibt $- \frac{1}{2} R[(aa)^3]^2 k^6$; aber da $R = - 2F = 2(ap)^2 = - 2[(aa)^3]^2$ ist, gibt sie $[(aa)^3]^4 k^6$. (19) verwandelt sich in

(20) $$8[(aa)^3]^2 k^3 - 12[(aa)^3]^2 k^4 + 4[(aa)^3]^2 k^6 = 0$$

oder

(21) $$k^3 - 3k + 2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $k = 1$, 1 und $- 2$ und wir haben die drei Lösungen

$$\xi_x = - 2a_x \quad \text{und} \quad \xi_x = a_x$$

zweimal.

Wenn wir die zu $- 2a_x$ konjugierten Lösungen suchen, so finden wir a_x, und wenn wir die zu a_x konjugierten Lösungen suchen, so finden wir $- 2a_x$ und a_x. Diese drei Lösungen bilden daher ein System und dieses System ist überhaupt das einzige; denn alle die Werte von σ sind gleich.

XIII.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo f und φ keinen gemeinsamen Faktor haben, aber φ einen Doppelfaktor hat, also ist $R = 0$ und Δ ein Quadrat.

Die Gleichung III, 10 ist jetzt:

$$\sigma^4 + 12E\sigma^2 - 16F\sigma - 12E^2 = 0. \tag{1}$$

Die Invariante j ist $-192(2E^3 + F^2)$. Wenn sie verschwindet, dann ist $F = \pm iE\sqrt{2E}$ und die Gleichung (1) ist:

$$\sigma^4 + 12E\sigma^2 \pm 16iE\sqrt{2E}\sigma - 12E^2 = 0.$$

Sie hat die dreifache Lösung $\sigma = \mp i\sqrt{2E}$ und die einfache $\sigma = \pm 3i\sqrt{2E}$.

Der erste Koeffizient der Hesseschen Form von (1) ist E. Ist nun E gleich Null, so sind Δ und f bis auf einen konstanten Faktor identisch, m. a. W.: f ist die Hessesche Form von φ. Aber wenn $R = 0$ ist, so geht die Hessesche Form von φ in φ auf oder φ ist durch f teilbar, und dies widerspricht der Voraussetzung. E ist also nie gleich Null und (1) hat immer vier von Null und, wenn ihre Invariante j nicht verschwindet, voneinander verschiedene Wurzeln. Die Formeln von § XII gelten und geben uns die neun Lösungen des Problems. Dieser Fall ist also nicht wesentlich verschieden von demjenigen in § XII, nur die Möglichkeit einer vierfachen Wurzel σ ist ausgeschlossen.

XIV.

Wir wollen jetzt den Fall, in welchem f und φ einen gemeinsamen Faktor haben, φ aber keinen Doppelfaktor hat, behandeln. Die Gleichung I, 19 lautet:

$$\begin{aligned} 4\Delta^3\varphi - 12f^2\Delta^2 p - 16p\Delta\Theta^2 + 8f\Delta\Theta\Omega - 32fpE\varphi^2 \\ - 8f^4 pE - 2f^4 G = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Jedes Glied ist durch $(a\xi)$ teilbar und die Gleichung gibt nur acht Lösungen, denn $\xi_x = n a_x$ ist keine Lösung. Da f und φ einen gemeinsamen Faktor a_x haben, so zeigt die Gleichung I, 1:

$$\xi_x^3 - 3f\xi_x + 2\varphi = \eta_x^3, \tag{2}$$

daß $\xi_x^3 - \eta_x^3$ durch a_x teilbar ist, also:

$$\xi_x - \varepsilon\,\eta_x = n\,a_x. \tag{3}$$

Setzen wir diesen Wert von η in (2) ein, so haben wir

$$\xi_x^3 - 3\,a_x^2\,\xi_x + 2\,a_x\,\beta_x^2 = (\xi_x - n\,a_x)^3$$

oder

$$3\,n\,a_x\,\xi_x^2 - 3\,a_x(1+n^2)\,\xi_x + 2\,a_x\beta_x^2 + n^3\,a_x^3 = 0. \tag{4}$$

Aus (4) finden wir:

$$\xi_x = \frac{1}{6\,n}\left[3a_x(1+n^2) \pm \sqrt{9(1+n^2)^2\,a_x - 12\,n(2\beta_x^2 + n^3\overline{a_x^2})}\right]. \tag{5}$$

(5) muß zwei in x rationale Wurzeln haben und deshalb muß n so bestimmt werden, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ein Quadrat wird. Seine Diskriminante ist:

$$D = 81\,(1+n^2)^4\,D_1 - 108\,n\,(1+n^2)^2\,D_2 + 144\,n^2\,D_3,$$

wo D_1 die Diskriminante von a_x^2, also Null ist, D_3 die Diskriminante von $2\,\beta_x^2 + n^3\,a_x^2$ und gleich $4\,n^3\,(a\,\beta)^2 + 4\,(\beta\,\beta')^2$ und D_2 zweimal die simultane Invariante von a_x^2 und $2\,\beta_x^2 + n^3\,a_x^2$ und gleich $4\,(a\,\beta)^2$ ist. D muß verschwinden, d. h.

$$-432\,n\,(1+n^2)^2\,(a\,\beta)^2 + 576\,n^2\,[n^3\,(a\,\beta)^2 + (\beta\,\beta')^2] = 0$$

oder vereinfacht:

$$n^4\,(a\,\beta)^2 - 6\,(a\,\beta)^2\,n^2 + 4\,(\beta\,\beta')^2\,n - 3\,(a\,\beta)^2 = 0. \tag{6}$$

Wenn wir diese Gleichung mit $(a\,\beta'')^2\,(a\,\beta''')^2$ multiplizieren, so wird der dritte Koeffizient $8\,(a\,\beta'')^2\,(a\,\beta''')^2\,(\beta\,\beta')^2$ sein. Dieser ist eine homogene Funktion der Koeffizienten von φ vom vierten Grade, welche mit R verschwindet und umgekehrt. Also ist $(a\,\beta'')^2\,(a\,\beta''')^2\,(\beta\,\beta')^2$ gleich $k\,R$ und k läßt sich durch ein numerisches Beispiel bestimmen und ist gleich $-\frac{27}{4}$. Wir setzen $(a\,\beta)^2 = P$ und schreiben anstatt (6):

$$n^4 - 6\,n^2 - 27\,\frac{R}{P^3}\,n - 3 = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung hat im allgemeinen vier Wurzeln und jeder Wurzel entsprechen zwei Werte von ξ, also acht Werte insgesamt.

(6) oder (7) kann nie eine vierfache Wurzel haben. Ist aber $(4P^2)^3 - (27R)^2 = 0$, so hat sie entweder die dreifache Wurzel $n = 1$ und die einfache $n = -3$ oder die dreifache -1 und die einfache 3, und das Problem hat nur vier Lösungen. Diese Bedingung können wir anders schreiben. Wir finden, daß E gleich $-\frac{2(\alpha\beta)^2(\alpha\beta')^2}{9}$ ist oder $P^2 = -\frac{9E}{2}$ und die Bedingung lautet also:

$$R^2 + 8E^3 = 0..$$

XV.

Hat φ einen Doppelfaktor und haben φ und f einen gemeinsamen Faktor, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der gemeinsame Faktor (a) der Doppelfaktor oder (b) der andere Faktor von φ ist.

Ad (a). Wir haben in diesem Falle $R = F = 0$. Setzen wir $f = a_x^2$, dann ist $\varphi = a_x^2\gamma_x$, und wir können immer ξ_x die Gestalt $ka_x + l\gamma_x$ geben. Setzen wir diesen Ausdruck in I, 1 ein, so haben wir

$$(1) \qquad (ka_x + l\gamma_x)^3 - 3a_x^2(ka_x + l\gamma_x) + 2a_x^2\gamma_x = \eta_x^3$$

oder

$$(2) \quad (k^3 - 3k)a_x^3 + 3(k^2l - l + \tfrac{2}{3})a_x^2\gamma_x + 3kl^2a_x\gamma_x^2 + l^3\gamma_x^3 = \eta_x^3.$$

Ist der Ausdruck links ein Kubus, so muß seine Hessesche Form verschwinden oder die Koeffizienten dieser Form müssen Null sein, also

$$(3) \qquad \begin{cases} kl^2(k^3 - 3k) - (k^2l - l + \frac{2}{3})^2 = 0 \\ l^3(k^3 - 3k) - kl^2(k^2l - l + \frac{2}{3})^2 = 0 \\ l^3(k^2l - l + \frac{2}{3}) - k^2l^4 = 0 \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$(4)\qquad \begin{cases} k^2 l^2 + \frac{2}{3} k^2 l + l^2 - \frac{4}{3} l + \frac{2}{9} = 0 \\ 2 k l^2 (l + \frac{1}{3}) = 0 \\ l^4 (l - \frac{2}{3}) = 0. \end{cases}$$

$l = 0$ ist nicht eine Lösung der ersten Gleichung, was auch k sein mag; deshalb sehen wir, daß k Null sein muß, damit die zwei letzten Gleichungen eine gemeinsame Lösung haben. Wir bekommen auf diese Weise die einzige mögliche Lösung der Gleichungen (4), nämlich $k = 0$, $l = \frac{2}{3}$. Das Problem hat also in diesem Falle die einzige Lösung

$$\xi_x = \tfrac{2}{3}\, \gamma_x.$$

Wir hätten dieses Resultat auch folgendermaßen gewinnen können. Die Gleichung XIV, 6 hat die Wurzel $n = 0$, weil $(\alpha\beta)^2$ gleich Null ist.

(4) ist dann $-3 a_x^2 \xi_x + 2 a_x \beta_x^2 = 0$ und hat die Lösung:

$$\xi_x = \frac{2 \beta_x^2}{3 a_x} = \frac{2}{3}\, \gamma_x.$$

Ad (b). Den Fall (b) können wir auf dieselbe Weise wie (a) lösen. Ist $f = a_x^2$, so ist $\varphi = a_x \beta_x^2$, wo β_x ein wirklicher Faktor ist. Wir setzen $\xi_x = k a_x + l \beta_x$ in I, 1 ein und finden:

$$(5)\quad (k^3 - 3k) a_x^3 + 3 (k^2 l - l) a_x^2 \beta_x + 3 (k l^2 + \tfrac{2}{3}) a_x \beta_x^2 + l^3 \beta_x^3 = \eta_x^3.$$

Entsprechend (4) haben wir:

$$(6)\qquad \begin{cases} 2 k^3 - 3 k^2 l^2 - 6 k - 3 l^2 = 0 \\ k^2 l + 3 k l^3 - l = 0 \\ 12 k l^2 + 9 l^4 + 4 = 0. \end{cases}$$

Die dritte Gleichung (6) zeigt, daß l nicht Null sein kann, also haben wir aus der zweiten Gleichung:

$$l^2 = \frac{1 - k^2}{3 k}.$$

Wenn wir diesen Wert entweder in die erste oder in die dritte Gleichung einführen, so bekommen wir:

$$3k^4 - 6k^2 - 1 = 0,$$

also

$$k^2 = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$k = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{9 \pm 6\sqrt{3}}$$

und

$$l^2 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{9 \pm 6\sqrt{3}}}.$$

Die Werte von k und l^2 lassen sich auf vierfache Art gruppieren und liefern also acht Werte von ξ. Wir setzen der Bequemlichkeit halber:

$$k_1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}} = k \qquad l_1 = \sqrt{\frac{-2\sqrt{3}}{3\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}}} = il$$

$$k_2 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}} = -k \qquad l_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}}} = l$$

$$k_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt{9 - 6\sqrt{3}} = ik' \qquad l_3 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{9 - 6\sqrt{3}}}} = il'$$

$$k_4 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{9 - 6\sqrt{3}} = -ik' \qquad l_4 = \sqrt{\frac{-2\sqrt{3}}{3\sqrt{9 - 6\sqrt{3}}}} = l'.$$

Die Lösungen sind:

$$\xi_1 = k\alpha_x + il\beta_x \qquad \xi_5 = ik'\alpha_x + il'\beta_x$$
$$\xi_2 = k\alpha_x - il\beta_x \qquad \xi_6 = ik'\alpha_x - il'\beta_x$$
$$\xi_3 = -k\alpha_x + l\beta_x \qquad \xi_7 = -ik'\alpha_x + l'\beta_x$$
$$\xi_4 = -k\alpha_x - l\beta_x \qquad \xi_8 = -ik'\alpha_x - l'\beta_x.$$

XVI.

Wir behandeln jetzt den Fall, wo φ einen Doppelfaktor hat. § II gibt die Gleichung für σ

$$(1)\ \sigma^4 + 6\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)\sigma^2 + 4\left[5DE - 4F + \frac{D^3}{4}\right]\sigma - 3\left[2E - \frac{D^2}{4}\right]^2 = 0$$

und § VI die Gleichung für t:

$$3(at)^2(pt) - (at)^3\left\{\frac{3D}{2} + \sigma\right\} = 0. \tag{2}$$

Wenn wir $\varphi = a_x^2 \beta_x$ setzen und die zweite Überschiebung mit f bilden, so bekommen wir:

$$p_x = 2\,a_x(a\,a)(a\,\beta) + \beta_x(a\,a)^2.$$

Von der Gestalt p sehen wir, daß (2) nie einen Faktor von φ als Lösung hat. Wir können also alle neun Lösungen durch die Resultate von § VII finden. Nur die Gleichung (21) gestattet nicht in diesem Falle die einfachere Form (22). Wir können aber die Gleichung, welche wir in § XII, 14 gefunden haben, benutzen, nämlich

$$\begin{aligned} &m^3(4 - m^3)f'^2\varrho^2 + 4m^3(1 - m^3)\Theta'\varrho + 2(1 - m^3)^2\Delta' \\ &\quad + 2(1 - m^3)f'D = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

oder da

$$m^3 = \frac{p'}{p' - \varrho^2\varphi'}$$

ist,

$$\begin{aligned} &(2f'\varphi'^2 D + 2\varphi'^2\Delta - 4f'^2\varphi'p')\varrho^2 - 4\varphi'f'\Theta'\varrho \\ &\quad + 3f'^2p'^2 - 2f'\varphi'p'D = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

VII, 21 ist:

$$f'^2\varphi'p'\varrho^2 + 2(\varphi'^2q' - \varphi'p'\Theta')\varrho - 3f'^2p'^2 + 2f'\varphi'p'D = 0. \tag{5}$$

Wir addieren (4) und (5) und erhalten:

$$(2f'\varphi'^2 D + 2\varphi'^2\Delta' - 3f'^2\varphi'p')\varrho^2 + 2(\varphi'^2q' - 3\varphi'p'\Theta')\varrho = 0.$$

Wir können durch $\varphi'\varrho$ dividieren und dann finden wir:

$$\varrho = \frac{2(\varphi'q' - 3p'\Theta')}{2f'\varphi'D + 2\varphi'\Delta' - 3f'^2p'}. \tag{6}$$

Hiermit ist dieser Fall vollständig gelöst.

XVII.

Nun lösen wir das Problem, wenn f und φ einen gemeinsamen Faktor haben. In diesem Falle ist eine Eigentümlichkeit immer vorhanden. In § II sahen wir, daß hier und nur

hier $m^3 = 1$ sein kann. In § IX war m^3 wirklich gleich 1; wir hatten nur vier verschiedene Lösungen, und die Sätze über konjugierte Lösungen und Systeme derselben verloren ihre richtige Bedeutung. In § XIV und XV b hatten wir nur acht Lösungen. In der Bildung der Gleichung II, 7 haben wir den überflüssigen Faktor $(1 - m^3)$ weggelassen. Hier dürfen wir es nicht tun und anstatt (7) haben wir:

$$(1) \quad \begin{aligned}(1-m^3)[(N-M)m^4 + 2(2K-D)m^3 - 6Lm^2 + (4M-N)m \\ + 2D - K] = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat im allgemeinen sieben Wurzeln, die drei Wurzeln 1, $\varkappa$, $\varkappa^2$ und die vier anderen m_1, m_2, m_3, m_4. Nehmen wir eine Lösung ξ_x als bekannt an, so haben wir acht andere:

$$(2) \quad \xi' = \xi + z,$$

wo

$$(3) \quad z = \frac{-3(\xi - m_i^2\eta) \pm \sqrt{9(\xi - m_i^2\eta)^2 - 12(1-m_i^3)(\xi^2 - m_i\eta^2 - f)}}{1 - m_i^3}$$

$$[i = 1, 2, 3, 4]$$

ist, und noch eine:

$$(4) \quad z = -\frac{\xi^2 - \varepsilon\eta^2 - f}{\xi - \varepsilon^2\eta} = \frac{f}{\xi - \varepsilon^2\eta} - (\xi + \varepsilon^2\eta),$$

wo ε einen der Werte 1, $\varkappa$, $\varkappa^2$ hat. ε kann nicht zwei von diesen Werten haben; denn wäre f durch zwei solche Faktoren, $(\xi - \varepsilon^2\eta)$ und $(\xi - \varepsilon'^2\eta)$, teilbar, so zeigt die Gleichung:

$$(5) \quad \xi^3 - 3f\xi + 2\varphi = \eta^3,$$

daß φ auch durch diese Faktoren teilbar ist, als daß f in φ aufgeht. Diesen Fall schließen wir vorläufig aus.

Die Gleichung

$$(6) \quad \begin{aligned}(N-M)m^4 + 2(2K-D)m^3 - 6Lm^2 + (4M-N)m \\ + 2D - K = 0\end{aligned}$$

hat die Wurzel $m = 1$, wenn

$$N - M + 4K - 2D - 6L + 4M - N + 2D - K = 0$$

oder wenn

$$M + K - 2L = 0 \tag{7}$$

ist.

In ähnlicher Weise finden wir, daß (6) die Wurzeln $\varkappa$ oder $\varkappa^2$ hat, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\varkappa M + K - 2\varkappa^2 L = 0 \tag{8}$$

$$\varkappa^2 M + K - 2\varkappa L = 0. \tag{9}$$

Multiplizieren wir (7), (8) und (9) miteinander, so bekommen wir

$$M^3 + K^3 + 6KLM - 8L^3 = 0 \tag{10}$$

als die notwendige und hinreichende Bedingung, daß (6) eine der Wurzeln $1, \varkappa, \varkappa^2$ hat.

Wir werden jetzt zeigen, daß in diesem Falle die Bedingung (10) immer erfüllt ist.

Wir haben die Beziehungen, (vgl. Clebsch, „Binäre Formen", S. 241):

$$4F = K^3 + M^3 - 2KLM + 4D(ML - K^2) + 4D^2K$$
$$2E = -K^2 + LM + KD - LN$$
$$0 = DN - 2(KM - L^2).$$

Wir multiplizieren mit $1, -4D$ und $4L$ und addieren:

$$4(F - 2DE) = K^3 + M^3 + 6KLM - 8L^3.$$

$F - 2DE$ ist aber die Resultante von f und φ und sie verschwindet, weil f und φ einen gemeinsamen Faktor haben. (6) hat also immer als Wurzel eine der Größen 1, $\varkappa$ und $\varkappa^2$ und die eine dieser Wurzeln entsprechende Lösung ist schon in Gleichung (4) gefunden worden. Wir haben also acht Lösungen des Problems.

Die Ausführungen von § XIV gelten hier nur mit Änderung der Symbole, weil f kein Quadrat ist und a_x keine Bedeutung hat. Bezeichnen wir den gemeinsamen Faktor von f und φ mit t_x, so ist:

(11) $$\xi_x - \varepsilon \eta_x = n t_x.$$

Wenn wir diesen Wert von η in (5) einsetzen, erhalten wir:

(12) $$3 n t \xi^2 - 3 (f + n^2 t^2) \xi + 2 \varphi + n^3 t^3 = 0,$$

also:

$$\xi_x = \frac{3 (f + n^2 t^2) \pm \sqrt{9 (f + n^2 t^2)^2 - 12 n t (2 \varphi + n^3 t^3)}}{6 n t}.$$

Bezeichnen wir den anderen Faktor von f mit a_x und von φ mit β_x^2, so können wir ξ_x in folgender Form schreiben:

(13) $$\xi_x = \frac{1}{6 n} [3 (a_x + n^2 t_x) \pm \sqrt{9 (a_x + n^2 t_x)^2 - 12 n (2 \beta_x^2 + n^3 t_x^2)}].$$

Wie in § XIV muß die Gleichung

(14) $$81 D_1 - 108 n D_2 + 144 n^2 D_3 = 0$$

entstehen.

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = 2 [2 (a \beta)^2 + 4 n^2 (a \beta) (t \beta) + n^3 (a t)^2 + 2 n^4 (t \beta)^2]$$
$$D_3 = 4 n^3 (t \beta)^2 + 4 (\beta \beta')^2.$$

(14) verwandelt sich in:

(15) $$2 (t \beta)^2 n^4 - 3 (a t)^2 n^3 - 12 (a \beta) (t \beta) n^2 + 8 (\beta \beta')^2 n - 6 (a \beta)^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat vier Wurzeln, deren jede zwei Werte von ξ_x gibt.

Im Falle, wo φ einen Doppelfaktor hat, kann dieser Faktor t_x oder eine von t_x verschiedene lineare Form sein. Je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, wird β_x^2 die Gestalt a) $t_x \gamma_x$ oder b) $\delta_x \cdot \delta_x$ haben.

Ad a). Hier ist:

(16) $$\xi_x = \frac{1}{6 n} [3 (a_x + n^2 t_x) \pm \sqrt{9 (a_x + n^2 t_x)^2 - 12 n (2 t_x \gamma_x + n^3 t_x^2)}].$$

$(t \beta)^2$ der Formel (15) ist hier Null, $(\beta \beta')^2$ ist $-\frac{1}{2} (t \gamma)^2$, $(a \beta) (t \beta)$ ist $\frac{1}{2} (a t) (t \gamma)$ und $(a \beta)^2$ ist $(a t) (a \gamma)$. Also anstatt (15) schreiben wir:

(17) $3(at)^2 n^3 + 6(at)(t\gamma)n^2 + 4(t\gamma)^2 n + 6(at)(a\gamma) = 0.$

Wir haben nicht mehr als sechs Lösungen des Problems, wie man aus (17) ersehen kann. In der Tat, wie wir jetzt zeigen wollen, gibt es aber nur vier Lösungen, selbst wenn die Gleichung (17) keine Doppelwurzel hat. Wir schreiben (17) in der Gestalt

(18) $$3A^2 n^3 + 6ABn^2 + 4B^2 n + 6AC = 0$$

und finden die Transformationen, welche diese Gleichung in sich selbst überführen, indem wir setzen

$$3A^2 n^3 + 6ABn^2 + 4B^2 n + 6AC = 3A^2 n_1^3 + 6ABn_1^2 + 4B^2 n_1 + 6AC$$

oder

$$3A^2(n^3 - n_1^3) + 6AB(n^2 - n_1^2) + 4B^2(n - n_1) = 0$$

oder wenn wir die Lösung $n = n_1$ weglassen:

(19) $3A^2(n^2 + nn_1 + n_1^2) + 6AB(n + n_1) + 4B^2 = 0.$

Diese Gleichung können wir für n_1 lösen:

$$n_1 = \frac{-6B - 3An \pm (3An + 2B)\sqrt{-3}}{6A} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) n + \left(\frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{3}\right) \frac{B}{A},$$

also:

(20) $$n_1 = \varkappa n - \frac{2\sqrt{-3}}{3} \varkappa^2 \frac{B}{A} \quad \text{oder} \quad n_1 = \varkappa^2 n + \frac{2\sqrt{-3}}{3} \varkappa \frac{B}{A},$$

d. h. ist n eine Wurzel der Gleichung (17), so sind auch

$$\varkappa n - \frac{2\sqrt{-3}}{3} \varkappa^2 \frac{B}{A} \quad \text{und} \quad \varkappa^2 n + \frac{2\sqrt{-3}}{3} \varkappa \frac{B}{A}$$

Wurzeln der Gleichung. Zunächst werden wir die Bedingung finden, daß (12) für zwei verschiedene Wurzeln von (18) dieselbe Lösung hat, m. a. W., daß die zwei Gleichungen

(21) $$\begin{cases} 3n\,\xi_x^2 - 3(a_x + n^2 t_x)\xi_x + 2t_x\gamma_x + n^3 t_x^2 = 0 \\ 3n_1\xi_x^2 - 3(a_x + n_1^2 t_x)\xi_x + 2t_x\gamma_x + n_1^3 t_x^3 = 0 \end{cases}$$

eine gemeinsame Lösung haben. Die Bedingung ist $D\,D''-D'^2=0$, wo $D(D'')$ die Diskriminante der quadratischen Form links in der ersten (zweiten) Gleichung (21) und D' die simultane Invariante der zwei Formen ist. Also ist die Bedingung:

$$(22)\quad \begin{aligned}&\tfrac{9}{4}[4n(2t\gamma+n^3t^2)-3(a+n^2t)^2][4n_1(2t\gamma+n_1^3t^2)-3(a+n_1^2t)^2]\\&-[3n(t\gamma+n_1^3t^2)-\tfrac{9}{2}(a+n^2t)(a+n_1^2t)+3n_1(2t\gamma+n^3t^2)]^2=0.\end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichung entwickeln und die gleichen Potenzen von a, t und γ zusammenfassen, so finden wir:

$$\begin{aligned}&-16\,t^2\gamma^2(n-n_1)^2-8\,t^3\gamma\,n\,n_1(n-n_1)^2(n+n_1)\\&+24\,at^2\gamma(n-n_1)^2(n+n_1)-4\,t^4n^2n_1^2(n-n_1)^2(n^2-n\,n_1+n_1^2)\\&-12\,a^2t^2(n-n_1)^2(n^2+n\,n_1+n_1^2)+12\,at^3n\,n_1(n-n_1)^2(n^2+n_1^2)=0.\end{aligned}$$

Übergehen wir den überflüssigen Faktor $(n-n_1)^2$ und dividieren wir durch $-4t^2$, so finden wir:

$$(23)\quad \begin{aligned}&4\gamma^2+2t\gamma(n+n_1)n\,n_1-6\,a\gamma(n+n_1)\\&+t^2n^2n_1^2(n^2-n\,n_1+n_1^2)+3a^2(n^2+n\,n_1+n_1^2)\\&-3\,atn\,n_1(n^2+n_1^2)=0.\end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Gleichung der Reihe nach für x_1, x_2 die Werte t_2, $-t_1$; γ_2, $-\gamma_1$; a_2, $-a_1$, so haben wir:

$$(24)\quad 3A^2(n^2+n\,n_1+n_1^2)+6AB(n+n_1)+4B^2=0$$

$$(25)\quad \begin{aligned}&B^2n^2n_1^2(n^2-n\,n_1+n_1^2)-3BCn\,n_1(n^2+n_1^2)\\&+3C^2(n^2+n\,n_1+n_1^2)=0\end{aligned}$$

$$(26)\quad A^2n^2n_1^2(n^2-n\,n_1+n_1^2)+2ACn\,n_1(n+n_1)+4C^2=0.$$

(23) ist eine Gleichung zweiten Grades in x. Sind also die Gleichungen (24), (25) und (26) befriedigt, so ist (23) für drei Werte von x und damit identisch befriedigt. Nun ist (24) dieselbe wie (19) und ist immer befriedigt, wenn n und n_1 zwei verschiedene Wurzeln von (18) sind. In die Gleichungen (25) und (26) führen wir einen Wert von n_1 aus (20) ein, z. B. den ersten:

$$x\,n-\frac{2\sqrt{-3}}{3}x^2\frac{B}{A}.$$

Wir bekommen zwei Gleichungen vom sechsten Grade in n, welche sich in folgender Gestalt schreiben lassen

$$-\frac{1}{A^4}(3A^2n^3+6ABn^2+4B^2n+6AC)\varkappa$$
$$(6A^4n^3+(9+3\sqrt{-3})AB^3n^2-(4B^4+9A^2BC)n$$
$$+6\varkappa AB^2C)=0$$

und

$$\frac{1}{A^2}(3A^2n^3+6ABn^2+4B^2n+6AC)\varkappa$$
$$(6A^2n^3+(9+3\sqrt{-3})ABn^2+(2+2\sqrt{-3})B^2n-6AC)=0.$$

Wegen der Gleichung (18) sind diese beiden befriedigt, wenn n irgend eine Wurzel von (18) ist.

Wir haben jetzt bewiesen, daß die drei Gleichungen:

$$3n_i\xi_x^2-3(a_x+n_i^2t_x)\xi_x+2t_x\gamma_x+n_i^3t_x^2=0,\quad i=1,2,3,$$

wo n_1, n_2, n_3 die drei Wurzeln von (18) sind, paarweise eine gemeinsame Lösung haben. Dies kann auf zwei Arten geschehen, entweder haben die Gleichungen die Gestalt

$$lm=0\quad ln=0\quad mn=0$$

oder

$$lm=0\quad ln=0\quad lk=0.$$

Die erste Möglichkeit ist ausgeschlossen; denn dann würde das Produkt von zwei Gleichungen durch die dritte teilbar sein, und das ist nicht der Fall. Also unter der Bedingung a) hat das Problem vier Lösungen.

Wir bemerken hier, daß, wenn wir $t_x=\gamma_x$ setzen, der Fall des Paragraphen IX vorkommt. Die Gleichung (17) gibt $n^3=-2$ und (13) gibt für ξ_x die drei Werte Null und die drei anderen $-\frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt[3]{4}\,a_x-\varepsilon\sqrt[3]{2}\,t_x$ $[\varepsilon=1,\varkappa,\varkappa^2]$, welche mit den Resultaten von § IX übereinstimmen.

Ad b). Hier verschwindet der Koeffizient von n in (15) und die Gleichung lautet:

(26) $2(t\delta)^2n^4-3(at^2)n^3-12(a\delta)(t\delta)n^2-6(a\delta)^2=0.$

Wir haben wieder vier Wurzeln und acht Werte von ξ_x.

XVIII.

In diesem Paragraphen werden wir den Fall, wo f in φ aufgeht, betrachten. Hier ist $(\alpha\beta)^2$ der Formel XVII, 15 Null und diese hat die Wurzel $n = 0$ und drei andere. Mittels der Gleichung XVII, 12 finden wir für $n = 0$ die Lösung

$$\xi_x = \frac{2\varphi}{3f} \tag{1}$$

und mittels der Gleichung (13) finden wir sechs andere Lösungen, entsprechend den anderen Werten von n, also im ganzen sieben Lösungen. η, welches $\xi = \frac{2\varphi}{3f}$ entspricht, ist gleich $\varepsilon\xi$. Wir haben dann $K = (\alpha\xi)^2$, $L = \varepsilon K$, $M = \varepsilon^2 K$ und $N = 0$.

Die Gleichung XVII, 1 gestaltet sich wie folgt

$$(1 - m^3)(\varepsilon^2 K m^4 - (4K - 2D)m^3 + 6\varepsilon K m^2 - 4\varepsilon^2 K m - 2D + K) = 0$$

oder wir können auch schreiben:

$$(2)\ (1 - m^3)(\varepsilon^2 m - 1)[Km^3 - (3K - 2D)\varepsilon m^2 + (3K + 2D)\varepsilon^2 m - (K - 2D)] = 0.$$

Aus (2) haben wir entweder $m = 1$, $\varkappa$, $\varkappa^2$ oder

$$(3)\quad Km^3 - (3K - 2D)\varepsilon m^2 + (3K + 2D)\varepsilon^2 m - (K - 2D) = 0$$

$m = 1$, $\varkappa$ oder $\varkappa^2$ gibt keine Lösung; denn

$$z = \frac{f}{\xi - m^2\eta} - \xi + m^2\eta = \frac{3f^2}{2(1 - \varepsilon')\varphi} - \frac{2\varphi}{f}(1 + \varepsilon')$$

kann nicht im allgemeinen eine lineare Form in x sein, sondern nur, wenn φ einen Doppelfaktor hat; denn dann ist f^2 durch φ teilbar. Die Gleichung (3) hat weder die Wurzel 1 noch ε^2 und, da $D \neq 0$ ist, hat sie nicht die Wurzel ε. Also hat sie drei Wurzeln, welche sechs neue Lösungen wirklich liefern. Mit der bekannten $\frac{2\varphi}{3f}$ sind es sieben Lösungen.

Die Koeffizienten der Hesseschen Form von der linken Seite in (3) sind:

$$\tfrac{2}{9}\varepsilon^2 D(9K - 2D),\ \tfrac{2}{9}D(9K - 2D),\ -\tfrac{4}{9}\varepsilon D(9K - 2D).$$

D ist nicht Null, also ist $9K - 2D = 0$ die Bedingung, daß (3) eine Doppelwurzel hat. Diese Wurzel ist dann auch eine dreifache. Sie ist $m = -2\varepsilon$. Wir haben also zwei neue Werte von ξ und drei Lösungen. Aus den Beziehungen zwischen den Koeffizienten von der Gleichung in m und denjenigen von der Gleichung in σ finden wir die Bedingungen:

$$E = \tfrac{1}{9} D^2, \quad F = \tfrac{2}{9} D^3, \quad R = -\tfrac{1}{27} D^3.$$

Hat φ einen Doppelfaktor, so ist $\frac{\varphi}{f}$ ein Teiler von f und K ist Null. Die Gleichung (3) wird

$$\varepsilon m^2 + \varepsilon^2 m + 1 = 0 \tag{4}$$

sein und sie hat die Wurzeln $m = 1$ und $m = \varepsilon^2$, also sind alle die Wurzeln der Gleichung XVII, 1 [mit Ausnahme von ∞]. $1, \varkappa, \varkappa^2$.

Setzen wir $f = a_x \cdot b_x$, dann ist $\varphi = a_x \cdot b_x^2$ und $\xi_x = \frac{2}{3} b_x$, $\eta_x = \frac{2}{3} b_x$.

Für $m = \varkappa$ ist:

$$z = \frac{a_x b_x}{\frac{2}{3}(1 - \varkappa^2) b_x} - \tfrac{2}{3}(1 + \varkappa^2) b_x,$$

also:

$$\xi' = \frac{3}{2(1 - \varkappa^2)} a_x - \tfrac{2}{3} \varkappa^2 b_x$$

und für:

$$m = \varkappa^2 \text{ ist } \xi'' = \frac{3}{2(1 - \varkappa)} a_x - \tfrac{2}{3} \varkappa b_x.$$

Diese Resultate lassen sich ohne Schwierigkeit durch die Methode von § XV finden. Wir setzen:

$$\xi_x = l a_x + k b_x. \tag{5}$$

Dann ist:

$$l^3 a_x^3 + (3l^2 k - 3l) a_x^2 b_x + (3lk^2 - 3k + 2) a_x b_x^2 + k^3 b_x^3 = \eta_x^3. \tag{6}$$

Wir setzen die Koeffizienten der Hesseschen Form gleich Null und haben:

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{2}{3}l^3 + l^3k - l^2 = 0 \\ lk^3 - \frac{4}{3}lk^2 - k^2 + \frac{4}{3}k - \frac{4}{9} = 0 \\ 2l^2k^2 - \frac{2}{3}l^2k - lk + \frac{2}{3}l = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung haben wir $l = 0$ oder $l = \frac{3}{2+3k}$. Für $l = 0$ ist $k = \frac{2}{3}$. Setzen wir den anderen Wert von l in die zweite oder dritte Gleichung ein, so finden wir:

$$(8)\qquad 9k^2 - 6k + 4 = 0;$$

also:

$$k = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3} = -\frac{2}{3}\varkappa \quad \text{oder} \quad -\frac{2}{3}\varkappa^2.$$

Dann ist:

$$l = \frac{3}{2(1-\varkappa)} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2(1-\varkappa^2)}$$

und:

$$\xi_x = \tfrac{2}{3}b_x$$

$$\xi'_x = \frac{3}{2(1-\varkappa)}a_x - \tfrac{2}{3}\varkappa b_x$$

$$\xi''_x = \frac{3}{2(1-\varkappa^2)}a_x - \tfrac{2}{3}\varkappa^2 b_x.$$

XIX.

Wir haben noch zwei Fälle zu untersuchen, erstens wo φ und zweitens wo f identisch verschwindet. Wenn φ verschwindet, so hat I, 1 die Gestalt:

$$(1)\qquad \xi_x^3 - 3f\xi_x = \eta_x^3.$$

Die dritte Gleichung I, 3 gibt $(a\xi)^2 = 0$, also muß ξ_x entweder Null oder ein Faktor von f sein. $\xi_x = 0$ ist offenbar eine Lösung. Setzen wir $f = a_x b_x$ und $\xi_x = m a_x$ in (1) ein, so haben wir die Form:

$$m^3 a_x^3 - 3m a_x^2 b_x,$$

welche ein vollständiger Kubus sein muß. Da ihre Hessesche Form identisch verschwindet, so entstehen folgende Gleichungen:

$$(m^3 a_1^3 - 3 m a_1^2 b_1)(m^3 a_1 a_2^2 - m a_2^2 b_1 - 2 m a_1 a_2 b_2)$$
$$= (m^3 a_1^2 a_2 - 2 m a_1 a_2 b_1 - m a_1^2 b_2)^2$$
$$(m^3 a_1^2 a_2 - 2 m a_1 a_2 b_1 - m a_1^2 b_2)(m^3 a_2^3 - 3 m a_2^2 b_2)$$
$$= (m^3 a_1 a_2^2 - m a_2^2 b_1 - 2 m a_1 a_2 b_2)^2$$
$$(m^3 a_1^3 - 3 m a_1^2 b_1)(m^3 a_2^3 - 3 m a_2^2 b_2)$$
$$= (m^3 a_1^2 a_2 - 2 m a_1 a_2 b_1 - m a_1^2 b_2)(m^3 a_1 a_2^2 - m a_2^2 b_1 - 2 m a_1 a_2 b_2).$$

Die zwei ersten Gleichungen lassen sich in $a_1^2 (a\,b)^2 = 0$ und $a_2^2 (a\,b)^2 = 0$ umformen; daraus sehen wir, daß eine andere Lösung als $\xi_x = 0$ gar nicht möglich ist, wenn nicht f ein Quadrat ist. Ist aber f ein Quadrat, so haben wir den Fall von § XI, und jeder Wert von ξ von der Form $m a_x$ ist eine Lösung.

Die folgenden Überlegungen sind kürzer, wenn auch nicht so streng logisch. $\xi^3 - 3 f \xi$ muß ein Kubus sein, d. h. ξ muß Null sein oder $\xi^2 - 3 f$ muß, abgesehen von einem Zahlenfaktor, mit ξ^2 identisch sein. Also ist

$$\xi^2 - 3 f = n \xi^2$$

oder

$$f = \frac{1 - n}{3} \xi^2.$$

Dies ist offenbar unmöglich, wenn f nicht ein vollständiges Quadrat ist.

Verschwindet f identisch, so nimmt I, 1 die Gestalt

$$\xi_x^3 + 2 \varphi = \eta_x^3 \tag{2}$$

an.

Wir können diese Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\xi_x^3 - \eta_x^3 = -2 \varphi. \tag{3}$$

Wir sehen, daß $\xi_x - \eta_x$ durch einen Faktor von φ teilbar ist. Ist α_x dieser Faktor und β_x^2 das Produkt der anderen Faktoren, dann ist

$$\xi_x - \eta_x = m \alpha_x$$

und

$$\xi_x^3 - (\xi_x - m\,a_x)^3 + 2\,a_x\,\beta_x^2 = 0$$

oder wenn wir entwickeln:

$$3\,m\,a_x\,\xi_x^2 - 3\,m\,a_x^2\,\xi_x + m^3\,a_x^3 + 2\,a_x\,\beta_x^2 = 0. \tag{4}$$

Wir können (4) durch a_x dividieren und für ξ_x auflösen.

$$\xi_x = \frac{1}{6\,m}\,[3\,m\,a_x \pm \sqrt{9\,m^2\,a_x^2 - 12\,m\,(m^3\,a_x^2 + 2\,\beta_x^2)}]. \tag{5}$$

ξ_x ist eine lineare Form und m muß so bestimmt werden, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat wird. Die Bedingung dafür ist

$$(\alpha\,\beta)^2\,m^4 + 4\,(\beta\,\beta')^2\,m = 0$$

oder da m nicht Null ist:

$$(\alpha\,\beta)^2\,m^3 + 4\,(\beta\,\beta')^2 = 0. \tag{6}$$

(6) gibt drei verschiedene Werte von m, und diese in (5) eingesetzt, ergeben sechs Lösungen für ξ.

Ist $(\beta\,\beta')^2 = 0$ oder β_x^2 ein Quadrat, d. h. hat φ einen Doppelfaktor, dann hat (6) keine Lösung außer der Lösung $m = 0$ und es gibt keinen Wert von ξ.

Ist aber $(\alpha\,\beta)^2$ auch gleich Null, d. h. ist φ ein Kubus, dann ist m unbestimmt. Die Gleichung (3) zeigt, daß $\xi_x^3 - \eta_x^3$ ein vollständiger Kubus sein muß. Dies ist nur möglich, wenn $\eta_x = n\,\xi_x$ ist. Also ist $(1 - n^3)\,\xi_x^3 = -2\,\varphi$ oder ξ_x ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, die dritte Wurzel von φ. Der Wert von diesem Zahlenfaktor ist nicht beschränkt, und jedes ξ von der Form $m\,a_x$ ist eine Lösung.

Der Vollständigkeit halber fügen wir hinzu den Fall, wo f und φ beide verschwinden. Dann ist jeder mögliche Wert von ξ_x eine Lösung.

Wir haben folgende Fälle untersucht und folgende Resultate gewonnen:

	Lösungen	Seite
A. Allgemeiner Fall	9	1
1. $4\left(2E-\frac{D^2}{4}\right)^3+\left(5DE-2R-4F+\frac{D^3}{4}\right)^2=0$	5	13
a) Spezielle Fälle	3	21
2. $2E-\frac{D^2}{4}=0 \quad 5DE-2R-4F+\frac{D^3}{4}=0$	2	18
a) Spezieller Fall	1	25
B. φ ist ein Kubus	9	26–47
1. $D^3-8F=0$	5	27
2. φ und f haben einen gemeinsamen Faktor	4	41
3. f ein Quadrat	9	44
4. f geht in φ auf	∞	47
5. φ verschwindet identisch	1	67
a) f ein Quadrat	∞	68
C. f ist ein Quadrat	9	47–57
1. $8E^3+(R+2F)^2=0$	5	48
2. $E=0 \quad R+2F=0$	2	51
3. φ hat einen Doppelfaktor	9	52
a) $2E^3+F^2=0$	5	53
4. f und φ haben einen gemeinsamen Faktor	8	53
a) $R^2+8E^3=0$	4	55
5. φ hat einen Doppelfaktor und f und φ einen gemeinsamen Faktor,		
a) Doppelfaktor ist gemeinsam	1	55
b) anderer Faktor ist gemeinsam	8	56
6. f verschwindet identisch	6	68
a) φ hat einen Doppelfaktor	0	69
b) φ ist ein Kubus	∞	69
D. φ hat einen Doppelfaktor	9	57

	Lösungen	Seite
E. f und φ haben einen gemeinsamen Faktor	8	58–64
1. φ hat einen Doppelfaktor,		
a) gemeinsamer Faktor doppelt	4	61
b) anderer Faktor doppelt	8	64
F. f geht in φ auf	7	65
1. φ hat einen Doppelfaktor	3	66

XX.

Wir werden jetzt die rein analytischen Überlegungen beiseite lassen, und uns der Betrachtung einiger geometrischer Bedeutungen unserer Resultate zuwenden.

Die Gleichung der allgemeinen Kurve dritter Ordnung in homogenen Koordinaten ist:

$$x_3^3 U_0 + x_3^2 U_1 + x_3 U_2 + U_3 = 0, \tag{1}$$

wo U_i eine Form vom i^{ten} Grade in x_1 und x_2 ist. Wir wählen das Koordinatendreieck so, daß die Kurve nicht durch die Ecke III hindurchgeht. Also ist $U_0 \neq 0$ und wir können es gleich 1 setzen. Machen wir die Koordinatentransformation mit der Determinante 1:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= \tfrac{1}{3} u_1 x_1 + \tfrac{1}{3} u_2 x_2 + x_3, \end{aligned}$$

so nimmt die Gleichung (1) die Gestalt

$$x_3'^3 + x_3' (U_2 - \tfrac{1}{3} U_1^2) + \tfrac{2}{27} U_1^3 - \tfrac{1}{3} U_1 U_2 + U_3 = 0$$

an oder, wenn wir die Striche weglassen:

$$x_3^3 - 3 x_3 f + 2\varphi = 0, \tag{2}$$

wo f eine binäre Form von zweiter und φ eine solche von dritter Ordnung ist.

Wir bringen die Kurve mit der Geraden

$$x_3 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \tag{3}$$

zur Schnitte und finden als die Gleichung, welche das Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$, d. h. die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Linie mit der Kurve, bestimmt:

$$\xi_x^3 - 3\,\xi_x f + 2\,\varphi = 0. \tag{4}$$

Wenn diese Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, so fallen die drei Schnittpunkte zusammen und die Linie (3) wird im allgemeinen eine Wendetangente. Sie kann aber auch eine Tangente in einem Doppelpunkt oder einer Spitze sein.

Unsere Resultate zeigen, daß es im allgemeinen neun Wendetangenten gibt, aber in manchen Fällen finden wir eine Ausnahme.

Im Falle B 4 haben wir unendlich viele solcher Tangenten gefunden. Hier aber hat die Gleichung (2) die Gestalt

$$x_3^3 - 3\,x_3(a_1x_1 + a_2x_2)^2 + 2\,(a_1x_1 + a_2x_2)^3 = 0$$

und die Kurve besteht aus den drei Geraden:

$$\begin{cases} x_3 - (a_1x_1 + a_2x_2) = 0 \\ x_3 - (1+\sqrt{3})(a_1x_1 + a_2x_2) = 0 \\ x_3 - (1-\sqrt{3})(a_1x_1 + a_2x_2) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

welche durch den Punkt $(-a_2,\ a_1,\ 0)$ hindurchgehen. Die Kurve hat keine eigentliche Wendetangente, aber jede Linie des Büschels

$$x_3 - \lambda\,(a_1x_1 + a_2x_2) = 0 \tag{6}$$

durch diesen Punkt schneidet die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten.

In den Fällen B 5 a und C 6 b, welche wir ebensogut unter B 3 klassifizieren könnten, haben wir denselben Fall. Die C_3 besteht aus drei durch einen Punkt gehenden Geraden. In dem Falle, wo f und φ beide verschwinden, besteht die C_3 aus drei zusammenfallenden Linien und jede beliebige Gerade schneidet die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten.

In den Fällen E und B 2, B 5, C 4 bis C 5, welche wir als spezielle Fälle unter E betrachten können, haben wir eine, vier oder acht Lösungen. Die Anzahl der Lösungen von dem geometrischen Probleme ist aber immer um eins größer; denn wenn wir die Gleichung der Schnittlinie in der Form (3) nehmen, schließen wir die Möglichkeit, daß sie durch den Punkt III hindurchgeht, aus. Aber in eben den fraglichen Fällen geht eine der gesuchten Linien immer durch diesen Punkt III.

Im Falle E hat die Gleichung (2) die Gestalt

$$x_3^3 - 3x_3 a_x b_x + 2a_x \beta_x^2 = 0$$

und wenn wir $a_x = 0$ setzen, so hat x_3 dreimal den Wert 0; also ist die Linie $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ eine Wendetangente und wir haben in diesem Falle neun Wendetangenten.

Im Falle F halten wir nur sieben Lösungen, aber hier ist es klar, daß zwei Wendetangenten durch III gehen, weil f und φ zwei gemeinsame lineare Faktoren haben, und wir haben wieder insgesamt neun.

Im Falle C 6 haben wir sechs Lösungen. Die Gleichung der Kurve hat die Gestalt $x_3^3 - \alpha_x \beta_x \gamma_x = 0$ und jede der Linien $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$, $\gamma_x = 0$ schneidet sie in drei zusammenfallenden Punkten. Also ist die Gesamtzahl der Wendetangenten wieder neun.

XXI.

Die Erklärung der anderen Fälle hängt von besonderen Eigenschaften der Kurve ab. Die Koordinaten eines singulären Punktes müssen die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -6x_3 a_x a_1 + 6a_x^2 a_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -6x_3 a_x a_2 + 6a_x^2 a_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 3x_3^2 - 3a_x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x_3 a_x a_1 - a_x^2 a_1 = 0 \\ x_3 a_x a_2 - a_x^2 a_2 = 0 \\ x_3^2 - a_x^2 = 0 \end{cases}$$

befriedigen. Diese Gleichungen haben eine Lösung, wenn

$a_x^2 a_1$, $a_x^2 a_2$ und a_x^2 einen gemeinsamen Faktor haben, welcher Doppelfaktor von φ ist. Dann ist $f = a_x b_x$ und $\varphi = a_x^2 \beta_x$ und die Gleichungen (1) sind:

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_3(a_x b_1 + b_x a_1) - 2(2a_x \beta_x a_1 + a_x^2 \beta_1) = 0 \\ 3x_3(a_x b_2 + b_x a_2) - 2(2a_x \beta_x a_2 + a_x^2 \beta_2) = 0 \\ x_3^2 - a_x b_x = 0. \end{cases}$$

$x_3 = 0$, $a_x = 0$ gibt eine Lösung:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2 : -a_1 : 0.$$

Dieser Punkt liegt auf der Kurve und ist daher ein singulärer Punkt. Die Tangenten in diesem Punkte sind die Geraden

$$\Sigma\Sigma y_i y_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

oder

$$4a_1^2(a\beta)y_1^2 + 8a_1 a_2(a\beta)y_1 y_2 + 4a_2^2(a\beta)y_2^2 - 6a_1(ab)y_1 y_3 - 6a_2(ab)y_2 y_3 = 0$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \\ 2(a\beta)(a_1 y_1 + a_2 y_2) - 3(ab)y_3 = 0. \end{cases}$$

Wir haben hier einen der Fälle B 2, C 5 a, C 6 a, E 1 a, F 1.

In B 2 ist $a = \beta$ und wir haben die zwei getrennten Tangenten $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, also einen Doppelpunkt. Wir haben die drei Wendetangenten:

$$(4) \quad \begin{cases} x_3 + \sqrt[3]{2}\, a_x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\, b_x = 0 \\ x_3 + \varkappa\sqrt[3]{2}\, a_x + \frac{\varkappa^2}{2}\sqrt[3]{4}\, b_x = 0 \\ x_3 + \varkappa^2\sqrt[3]{2}\, a_x + \frac{\varkappa}{2}\sqrt[3]{4}\, b_x = 0 \end{cases} \qquad \text{[vgl. S. 42].}$$

Also ist ein Wendepunkt reell und zwei sind imaginär, wenn die Gleichung der Kurve reelle Koeffizienten hat.

In C 5 a ist $a = b$; die zwei Tangenten stimmen überein und der Punkt ist eine Spitze. Wir haben eine Wendetangente, nämlich

$$3x_3 - 2\beta_1 x_1 - 2\beta_2 x_2 = 0 \qquad \text{[vgl. S. 56]} \tag{5}$$

und einen Wendepunkt, welcher reell ist.

In F 1 sind b und β gleich. Wir haben in dem Doppelpunkte die Tangenten

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ 3x_3 - 2a_1 x_1 - 2a_2 x_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

und wir haben die drei Wendetangenten:

$$\begin{cases} b_x = 0 \\ x_3 - \dfrac{3}{2\sqrt{1-\varkappa}} b_x + \frac{2}{3}\varkappa a_x = 0 \\ x_3 - \dfrac{3}{2\sqrt{1-\varkappa^2}} b_x + \frac{2}{3}\varkappa^2 a_x = 0 \qquad \text{[vgl. S. 67].} \end{cases} \tag{7}$$

In E 1 a haben wir den allgemeinen Fall. Wir haben in dem Doppelpunkte die zwei Tangenten:

$$\begin{cases} t_1 x_1 + t_2 x_2 = 0 \\ 2B(t_1 x_1 + t_2 x_2) + 3Ax_3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Die zweite Tangente muß eine der vier Lösungen der drei Gleichungen [vgl. S. 64]

$$3n_i \xi_x^2 - 3(a_x + n_i^2 t_x)\xi_x + 2t_x \gamma_x + n_i^3 t_x^2 = 0 \quad [i = 1, 2, 3] \tag{9}$$

sein, und in der Tat ist sie eine gemeinsame Wurzel aller drei Gleichungen. Denn wir finden

$$\xi_x = -\frac{2Bt_x}{3A};$$

setzen wir nämlich diesen Wert in (9) ein, so haben wir

$$\frac{4n_i B^2}{3A^2} t_x^2 + \frac{2B}{A}(a_x + n_i t_x)t_x + 2t_x \gamma_x + n_i^3 t_x^2 = 0 \quad [i = 1, 2, 3]$$

oder wenn wir durch t_x dividieren und umformen:

(10) $3A^2n_i^3t_x + 6ABn_i^2t_x + 4n_iB^2t_x + 6A^2\gamma_x + 6ABa_x = 0.$

Setzen wir in (10) $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$ und dividieren wir dann durch A oder setzen wir $x_1 = \gamma_2$, $x_2 = -\gamma_1$ und dividieren wir durch B, so finden wir in beiden Fällen:

(11) $$3A^2n_i^3 + 6ABn_i^2 + 4n_iB^2 + 6AC = 0.$$

(11) ist eine Identität [vgl. § XVII, 17], also ist (10) für zwei Werte von x und daher identisch befriedigt, und

$$\xi_x = -\frac{2B}{3A}t_x$$

ist eine Lösung jeder der drei Gleichungen (9). Die drei anderen Lösungen von (9) geben die Wendetangenten.

In C 6 a hat die Gleichung der C_3 die Form $x_3^3 - a_x^2\gamma_x = 0$. Der Doppelpunkt ist eine Spitze, die Tangente in der Spitze ist $a_x = 0$ und die einzige Wendetangente ist $\gamma_x = 0$.

Auch im Falle B 1 können wir die Gleichungen (1) behandeln. Wir multiplizieren die erste mit x_1 und die zweite mit x_2, addieren und bekommen: $x_3f - \varphi = 0$. Daraus folgt $x_3^2f^2 = \varphi^2$ und wenn wir diese Gleichung mit der dritten Gleichung (1) vergleichen, so finden wir:

(12) $$f^3 = \varphi^2.$$

Wir können x_3 auch auf folgende Weise eliminieren. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit b_xb_2 und die zweite mit $-b_xb_1$, addieren und erhalten:

(13) $$(a\,a)\,a_x a_x^2 = (f, \varphi)_1 = 0.$$

In diesem Falle ist φ ein Kubus und die a wirkliche Koeffizienten. Wir können (12) und (13) umformen in

(14) $$f = a_x^2 = \varepsilon\, a_x^2$$

und, da $a_x = 0$ keine Lösung von (14) ist:

(15) $$(a\,a)a_x = 0.$$

Die Bedingungen, daß (14) und (15) eine gemeinsame Lösung haben, ist $\frac{1}{2}(a\,a)^2D = \varepsilon[(a\,a)^2]^2$ oder wenn wir um-

formen und den Wert $[(a\,a)^2]^3 = F$ einsetzen, $D^3 = 8\,F$. Diese Bedingung ist erfüllt; die Gleichungen (1) haben eine Lösung und die C_3 hat einen Doppelpunkt. Dieser ist der Punkt:

$$-(a\,a)\,a_2 : (a\,a)\,a_1 : \varepsilon^2 (a\,a)^2.$$

Die Tangenten in diesem Punkte sind:

$$\sum\sum y_i y_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

wo $\psi = 0$ die Gleichung der C_3 ist. Wir finden:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = -6\,x_3 a_1^2 + 12\,a_x a_1^2 = -6\,(\varepsilon^2 (b\,a)^2 a_1^2 - 2\,(a\,a)^2 a_1^2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -6\,x_3 a_2^2 + 12\,a_x a_2^2 = -6\,(\varepsilon^2 (b\,a)^2 a_2^2 - 2\,(a\,a)^2 a_2^2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 6\,x_3 = 6\,\varepsilon^2 (b\,a)^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = -6\,x_3 a_1 a_2 + 12\,a_x a_1 a_2 = -6\,(\varepsilon^2 (b\,a)^2 a_1 a_2 - 2 (a\,a)^2 a_1 a_2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} = -6\,a_x a_1 = -6\,\frac{D}{2}\,a_2 = -6\,\varepsilon\,(b\,a)^2 a_2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} = -6\,a_x a_2 = -6 \cdot \frac{D}{2} \cdot a_1 = -6\,\varepsilon (b\,a)^2 a_1.$$

Die Tangenten sind also:

$$-\varepsilon^2 (b\,a)^2 a_x^2 + 2\,(a\,a)^2 a_x^2 + \varepsilon^2 (b\,a)^2 x_3^2 - 2\,\varepsilon\,(b\,a)^2 a_x x_3 = 0.$$

Wir multiplizieren mit $\frac{\varepsilon}{(b\,a)^2}$ und erhalten:

$$x_3^2 - 2\,\varepsilon^2 a_x x_3 + 2\,\varepsilon\,a_x^2 - a_x^2 = 0.$$

Diese Gleichung können wir zerlegen in:

$$x_3 - \varepsilon^2 a_x \pm \sqrt{a_x^2 - \varepsilon\,a_x^2} = 0.$$

Hier haben wir zwei der Lösungen, die wir in § 11 gefunden hatten. Die drei anderen geben die eigentlichen Wendetangenten, nämlich:

$$x_3 = 0$$

und

$$x_3 + 3\varepsilon^2 a_x \pm \sqrt{3}\sqrt{\varepsilon a_x^2 - a_x^2} = 0.$$

B 5 können wir in ähnlicher Weise erklären. Die Gleichung der Kurve ist:

$$x_3^3 - 3 x_3 a_x b_x = 0.$$

Wir haben eine Lösung gefunden. $a_x = 0$ und $b_x = 0$ sind auch solche, aber sie sind nicht gefunden worden, weil sie durch die Ecke III gehen. Die C_3 besteht aus der Linie $x_3 = 0$ und dem Kegelschnitte $x_3^2 - a_x b_x = 0$. Die drei Lösungen sind die Linie $x_3 = 0$ selbst und die zwei Tangenten an dem Kegelschnitte in den Schnittpunkten mit der Geraden.

XXII.

Für die Fälle, welche nicht so einfach wie die vorhergehenden sind, werden wir eine andere Methode benutzen. Diese Methode ist übersichtlicher und schließt alle die vorhergehenden Fälle ein. Wir haben gesehen, daß die Gleichung in σ, nämlich:

$$\sigma^4 + 6\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)\sigma^2 + 4\left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)\sigma - 3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2 = 0, \tag{1}$$

eine dreifache Wurzel hat, wenn die Bedingung

$$4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist hinreichend dafür, daß das Problem fünf Lösungen besitzt [vgl. § II]. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie auch notwendig ist, gibt folgende Tabelle von den Fällen, wo wir fünf Lösungen gefunden haben:

A 1 $\quad 4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0$

B 1 $\quad E = 0 \quad R = 0 \quad D^3 - 8F = 0$

B 2 $\quad E = R = F = 0$

C 1 $\quad D = 0 \quad 8E^3 + (R + 2F)^2 = 0$

C 3 a $\quad D = R = 0 \quad 2E^3 + F^2 = 0$

C 4 a $\quad D = F = 0 \quad R^2 + 8E^3 = 0$

E 1 a, F 1 $\quad R = E = F = 0.$

Wir sehen, daß in jedem Falle (2) erfüllt ist. Ferner, wenn die Bedingungen

$$2E - \frac{D^2}{4} = 0 \tag{3}$$

und

$$5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} = 0$$

erfüllt sind, hat die Gleichung (1) eine vierfache Wurzel und diese sind notwendig und hinreichend, damit das Problem zwei Lösungen hat [vgl. § III und IV]. Wir haben gezeigt, daß die Lösungen des Problems die Wendetangenten einer C_3 sind. Wegen der Plückerschen Formeln wissen wir, daß die C_3 weniger als neun bzw. drei Wendetangenten haben kann, aber nur dann, wenn sie einen Doppelpunkt bzw. eine Spitze hat. Also sind die Bedingungen (3) die Bedingungen für eine Spitze. Wir wissen aus der Entwickelung der Theorie der C_3 in ternärem Gebiete [vgl. „Vorlesungen über Geometrie", Clebsch-Lindemann, S. 562], daß die Bedingungen für einen Doppelpunkt bzw. eine Spitze sind

$$S^3 - 6T^2 = 0 \tag{4}$$

$$S = 0 \quad T = 0 \tag{5}$$

und daß die Wurzeln der Gleichung

$$G(\varkappa, \lambda) = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}S^2\lambda^4 = 0 \tag{6}$$

die vier Wendepunktsdreiecke bestimmen. Es muß also ein Zusammenhang zwischen den Gleichungen (1) und (6) einerseits und den Gleichungen (3) und (5) andererseits stattfinden.

Die Gleichung der C_3 ist:

$$a_x^3 = x_3^3 - 3fx_3 + 2\varphi = 0.$$

Wir werden zuerst die Hessesche Form berechnen und um sie von der binären Hesseschen Form Δ zu unterscheiden, werden wir sie Δ' nennen.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -x_3 a_1^2 + 2 a_x a_1^2 & -x_3 a_1 a_2 + 2 a_x a_1 a_2 & a_x a_1 \\ -x_3 b_1 b_2 + 2 \beta_x \beta_1 \beta_2 & -x_3 b_2^2 + 2 \beta_x \beta_2^2 & b_x b_1 \\ c_x c_1 & c_x c_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_3^3 (a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2) - 2 x_3^2 (\beta_x a_1^2 \beta_2^2 + a_x b_2^2 a_1^2 - a_x b_1 b_2 a_1 a_2 - \beta_x a_1 a_2 \beta_1 \beta_2) + 4 x_3 (a_x \beta_x a_1^2 \beta_2^2 - a_x \beta_x a_1 a_2 \beta_1 \beta_2)$$
$$- x_3 (b_x c_x a_1 a_2 b_2 c_1 + a_x c_x a_1 b_1 b_2 c_2 - a_x c_x a_1 b_2^2 c_1 - b_x c_x a_1^2 b_2 c_2) + 2 (b_x c_x a_x b_2 c_1 a_1 a_2 + a_x c_x \beta_x a_1 c_2 \beta_1 \beta_2 - a_x c_x \beta_x a_1 c_1 \beta_2^2 - b_x c_x a_x b_2 c_2 a_1^2).$$

Wegen der gleichen Bedeutung der Symbole $a = b = c$ und $\alpha = \beta$ finden wir:

$$\Delta' = \frac{D}{2} x_3^3 - 2 (a\alpha)^2 a_x x_3^2 + [2 (a\beta)^2 a_x \beta_x + a_x b_x (ac)(bc)] x_3 - 2 a_x b_x a_x (a\alpha)(b\alpha).$$

Nun ist

$$(ac)(bc) a_x b_x = \tfrac{1}{2} [(ca)^2 b_x^2 + (cb)^2 a_x^2 - (ab)^2 c_x^2] = \tfrac{1}{2} D a_x^2$$

und

$$a_x (a\alpha)(b\alpha) a_x b_x = \frac{a_x}{2} [(a\alpha)^2 b_x^2 + (ab)^2 a_x^2 - (ab)^2 a_x^2] = pf - \tfrac{1}{2} D\varphi.$$

Also ist:

$$\Delta' = \tfrac{1}{2} [D x_3^3 - 4 p x_3^2 + (4\Delta + Df) x_3 - 4pf + 2 D\varphi].$$

Um S zu finden, nehmen wir den Wert, welchen Aronhold berechnet hat, nämlich:

$$\tfrac{3}{2}\,S = (a_{122}a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222}a_{233} - a_{223}^2)(a_{111}a_{133} - a_{113}^2)$$
$$+ (a_{223}a_{333} - a_{233}^2)(a_{111}a_{122} - a_{112}^2) + (a_{222}a_{333} - a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123})$$
$$+ (a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2\,a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122})$$
$$+ (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2\,a_{123}a_{233})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133}).$$

Wir haben:

$$a_{111} = 2\,a_0 \quad a_{112} = 2\,a_1 \quad a_{113} = -\,a_0 \quad a_{122} = 2\,a_2 \quad a_{123} = -\,a_1$$
$$a_{133} = 0 \quad a_{222} = 2\,a_3 \quad a_{223} = -\,a_2 \quad a_{233} = 0 \quad a_{333} = 1.$$

Wenn wir diese Werte in S einsetzen und vereinfachen, so bekommen wir:

$$\tfrac{3}{2}\,S = a_1^4 + a_0^2 a_2^2 - 2\,a_0 a_1^2 a_2 - 4\,a_2 a_0 a_2 + 4\,a_2 a_1^2 - 4\,a_0 a_1 a_3$$
$$+ 4\,a_1 a_0 a_3 - 4\,a_1 a_1 a_2 + 4\,a_0 a_2^2.$$

Wir sehen sogleich, daß $a_1^4 - 2\,a_0 a_1^2 a_2 + a_0^2 a_2^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)^2$ gleich $\frac{1}{4}\,D^2$ ist. Setzen wir:

$$A = a_0 a_2^2 - a_0 a_1 a_3 - a_1 a_1 a_2 + a_1 a_0 a_3 - a_2 a_0 a_2 + a_2 a_1^2,$$

so ist

$$2\,A = 2\,a_0 a_2 \beta_2 - a_0 a_1 \beta_3 - a_0 a_3 \beta_1 - a_1 a_1 \beta_2 - a_1 a_2 \beta_1 + a_1 a_0 \beta_3$$
$$+ a_1 a_3 \beta_0 - a_2 a_0 \beta_2 - a_2 a_2 \beta_0 + 2\,a_2 a_1 \beta_1$$

oder symbolisch:

$$2\,A = 2\,a_1^2 a_1 a_2^2 \beta_1 \beta_2^2 - a_1^2 a_1^2 a_2 \beta_2^3 - a_1^2 a_2^3 \beta_1^2 \beta_2 - a_1 a_2 a_1^2 a_2 \beta_1 \beta_2^2$$
$$- a_1 a_2 a_1 a_2^2 \beta_1^2 \beta_2 + a_1 a_2 a_1^3 \beta_2^3 + a_1 a_2 a_2^3 \beta_1^3 - a_2^2 a_1^3 \beta_1 \beta_2^2$$
$$- a_2^2 a_1 a_2^2 \beta_1^3 + 2\,a_2^2 a_1^2 a_2 \beta_1^2 \beta_2$$
$$= -(a\beta)^2 (a\alpha)(a\beta) = -(a\Delta)^2 = -E.$$

Also haben wir

$$\tfrac{3}{2}\,S = \tfrac{1}{4}\,D^2 - 2\,E$$

oder

$$S = -\tfrac{2}{3}\,(2\,E - \tfrac{1}{4}\,D^2). \tag{7}$$

Aus S berechnen wir T durch die Formel $\frac{1}{4}\,\delta S = T$. δS bedeutet $\sum \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}}\,a_{ikh}$, wo die a die Koeffizienten von Δ' sind und folgende Werte haben:

$$6\,a_{111} = -12\,a_0 p_1 + 6\,a_0 D \qquad 6\,a_{112} = -8\,a_1 p_1 - 4\,a_0 p_2 + 6\,a_1 D$$
$$6\,a_{113} = 4\,A_0 + a_0 D \qquad 6\,a_{122} = -4\,a_2 p_1 - 8\,a_1 p_2 + 6\,a_2 D$$
$$6\,a_{123} = 4\,A_1 + a_1 D \qquad 6\,a_{133} = -4\,p_1$$
$$6\,a_{222} = -12\,a_2 p_2 + 6\,a_3 D \qquad 6\,a_{223} = 4\,A_2 + a_2 D$$
$$6\,a_{233} = -4\,p_2 \qquad 6\,a_{333} = 3\,D.$$

Das Resultat ist:

$$9\,\delta S = 8\,A_1 + 4\,A_2 + 16\,A_3 + A_4 D + A_5 D,$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= 4\,a_1^2 a_2 p_1 + 2\,a_2^2 a_0 p_1 - 6\,a_1 a_2 a_1 p_1 + 2\,a_0 a_2 a_1 p_1 \\ &\quad - 2\,a_0 a_1 a_3 p_1 + 2\,a_0^2 a_3 p_2 + 2\,a_0 a_2 a_1 p_2 - 2\,a_1 a_2 a_0 p_2 \\ &\quad + 4\,a_1^2 a_1 p_2 - 6\,a_0 a_1 a_2 p_2 \\ &= 2\,(a\,p)\,(b\,a)^2\,(a\,a) = 2\,(a\,p)^2 = 2\,F, \\ A_2 &= -4\,a_1^3 A_1 + 4\,a_0 a_1 a_2 A_1 - 2\,a_0 a_2^2 A_0 + 2\,a_1^2 a_2 A_0 \\ &\quad - 2\,a_0^2 a_2 A_2 + 2\,a_0 a_1^2 A_2 \\ &= -2\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,(a_0 A_2 - 2\,a_1 A_1 + a_2 A_0) = -D\,(a\,A)^2 \\ &= -D\,E, \\ A_3 &= a_1 a_3 A_0 - a_2^2 A_0 - a_0 a_3 A_1 + a_1 a_2 A_1 - a_1^2 A_2 + a_0 a_2 A_2 \end{aligned}$$

ist.

Dieser Ausdruck geht in $-A$ über, wenn wir a anstatt A schreiben. Wir haben also:

$$\begin{aligned} A_3 &= \tfrac{1}{2}\,(a\,\beta)^2\,(a\,A)\,(\beta\,A) = \tfrac{1}{2}\,(A\,A')^2 = \tfrac{1}{2}\,R, \\ A_4 &= 32\,(a_0 a_2^2 - a_0 a_1 a_3 + a_1 a_0 a_3 - a_1 a_1 a_2 + a_2 a_1^2 - a_2 a_0 a_2) \\ &= -16\,E, \end{aligned}$$

wie schon berechnet.

$$A_5 = -4\,a_1^4 + 8\,a_0 a_1^2 a_2 - 4\,a_0^2 a_2^2 = -4\,(a_0 a_2 - a_1^2)^2 = -D^2.$$

Weiter haben wir dann

$$9\,\delta S = 36\,T = 16\,F - 4\,DE + 8\,R - 16\,DE - D^2$$

oder

$$(8) \qquad T = -\frac{1}{9}\left(5\,DE - 2\,R - 4\,F + \frac{D^2}{4}\right).$$

Die Gleichung

$$\sigma^4 + 6\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)\sigma^2 + 4\left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)\sigma - 3\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^2 = 0$$

ist folglich identisch mit

$$\sigma^4 - 9S\sigma^2 - 36T\sigma - \tfrac{27}{4}S^2 = 0$$

und diese geht in

$$G(\varkappa\lambda) = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}S^2 = 0$$

über, wenn wir $\sigma = \frac{3\varkappa}{\lambda}$ setzen.

Wir finden:

$$S^3 - 6T^2 = -\frac{8}{27}\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 - \frac{2}{27}\left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2$$

$$= -\frac{2}{27}\left[4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2\right].$$

Also ist die Bedingung (2) nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für das Vorhandensein von einem Doppelpunkt der C_3 oder von fünf Lösungen des algebraischen Problems.

Wir bemerken, daß wir zufälligerweise die Resultante der speziellen Formen sechster und dritter Ordnung

$$f^3 - \varphi^2 \quad \text{und} \quad (f, \varphi)_1 = \Theta$$

gefunden haben, nämlich:

$$4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2;$$

denn das Verschwinden dieser Invariante muß die hinreichende und notwendige Bedingung dafür sein, daß die Gleichungen XXI, 7 und, was dasselbe ist, die Gleichungen XXI, (12) und (13) eine gemeinsame Wurzel haben.

XXIII.

Die Plückerschen Formeln zeigen, daß eine C_3 entweder neun, drei oder einen Wendepunkt hat. Die Lösungen unseres Problems schließen die Wendetangenten und die Tangenten in einem Doppelpunkte ein. Die Anzahl dieser Lösungen muß daher neun, fünf oder zwei sein. Wir haben Fälle gefunden, wo die Anzahl unendlich, drei oder eins ist, und in diesen Fällen kann die Kurve keine eigentliche C_3 sein, sondern muß zerfallen. In der Tat haben wir schon gesehen, daß in den Fällen, wo wir unendlich viele Lösungen hatten, d. h. wenn q ein Kubus, f ein Quadrat ist und f und q einen gemeinsamen Faktor haben, die C_3 aus drei durch einen Punkt gehenden Geraden entsteht. Wir können diesen Satz umkehren. Die Bedingungen dafür, daß die C_3 in drei Gerade, die durch einen Punkt gehen, zerfällt, ist, daß Δ' identisch verschwindet, d. h., daß $D = 0$ ist und daß Δ_x und p_x identisch verschwinden; d. h. f ist ein Quadrat, q ein Kubus und f und φ haben einen gemeinsamen Faktor.

Es bleiben dann noch die Fälle übrig, wo wir drei oder eine Lösung haben. Wir sehen, daß, wenn das Problem drei Lösungen hat, die C_3 in drei beliebige Gerade oder in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen muß, daß, wenn das Problem eine Lösung hat, die C_3 in einen Kegelschnitt und seine Tangente zerfallen muß.

Wir werden jetzt die Gleichung einer C_3, welche

(1) aus drei Geraden,

(2) aus einer Geraden und einem Kegelschnitte,

(3) aus einem Kegelschnitte und seiner Tangente

besteht, in der Form $x_3^3 - 2fx_3 + 2\varphi = 0$ herstellen.

Es seien

$$\begin{aligned} &x_3 - a_x - b_x = 0 \\ (1)\qquad &x_3 + 2a_x - b_x = 0 \\ &x_3 - a_x + 2b_x = 0 \end{aligned}$$

drei beliebige Gerade; sie bilden eine C_3, deren Gleichung ist:

$$x_3^3 - 3(a_x^2 - a_x b_x + b_x^2) x_3 + 2(a_x^3 - \tfrac{3}{2} a_x^2 b_x - \tfrac{3}{2} a_x b_x^2 + b_x^3) = 0.$$

Wir sehen, daß der Ausdruck

$$\xi_x^3 - 3(a_x^2 - a_x b_x + b_x^2) \xi_x + 2(a_x^3 - \tfrac{3}{2} a_x^2 b_x - \tfrac{3}{2} a_x b_x^2 + b_x^3)$$

für $\xi_x = a_x + b_x$, $\xi_x' = -2a_x + b_x$, $\xi_x'' = a_x - 2b_x$ ein Kubus ist und zwar ist er in jedem Falle Null. Also ist $\eta_x = 0$ und $N = M = L = 0$. Wir finden $D = \frac{3}{2}(ab)^2$ und in jedem Falle $K = 3(ab)^2$, daher $2D - K = 0$ [vgl. S. 25]. Wir haben schon gezeigt, daß in diesem Falle die Gleichungen

$$4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0,$$

$$F = 0,\ R + DE = 0$$

bestehen. Diese Bedingungen sind aber nicht hinreichend. Wir wissen, daß, wenn die C_3 in drei Gerade zerfällt, ihre Hessesche Form zu der Grundform proportional sein muß. Die Grundform ist

$$x_3^3 - 3f x_3 + 2\varphi$$

und ihre Hessesche Form ist, wie soeben berechnet:

$$\tfrac{1}{2}[Dx_3^3 - 4px_3^2 + (4\Delta + Df) x_3 - 4pf + 2D\varphi].$$

Wir bekommen also als weitere notwendige Bedingungen, daß p_x und $\Delta + Df$ identisch verschwinden müssen. Diese zwei Bedingungen sind auch hinreichend und es ist leicht zu sehen, daß sie die anderen einschließen; denn mit p verschwindet F und wenn $\Delta + Df$ verschwindet, so ist $(a\Delta)^2 = E = -D^2$ und $(\Delta\Delta')^2 = R = -DE$, und aus diesen Beziehungen folgt:

$$4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0.$$

(2) Wir nehmen die beliebige Gerade $x_3 = 0$ und den beliebigen Kegelschnitt $x_3^2 + 3x_3 u_x + v_x^2 = 0$. Sie bilden zusammen die C_3:

$$x_3^3 + 3x_3^2 u_x + x_3 v_x^2 = 0.$$

Wir machen eine Transformation, um die Gleichung in die gewöhnliche Form zu bringen, und erhalten für Linie, Kegelschnitt und C_3 die Gleichungen:

$$x_3 - u_x = 0$$

$$x_3^2 + x_3 u_x - 2 u_x^2 + v_x^2 = 0$$

$$x_3^3 - 3\left(u_x^2 - \frac{v_x^2}{3}\right) x_3 + 2\left(u_x^3 - u_x \frac{v_x^2}{2}\right) = 0.$$

Für $\xi_x = u_x$ finden wir $\eta_x = 0$, also $M = L = N = 0$ [vgl. S. 24]. Wir finden auch $(a\xi)^2 = K = -\frac{1}{3}(uv)^2 = -\frac{1}{3}d$ und $D = -\frac{2}{3}(uv)^2 + \frac{1}{9}(vv')^2 = -\frac{2}{3}d + \frac{1}{9}d'$.

Die Gleichung für m ist:

$$-\tfrac{2}{9}d' m^3 - d + \tfrac{2}{9}d' = 0$$

$$m^3 = -\frac{9d - 2d'}{2d'}.$$

Für z haben wir die Gleichungen

$$9dz^2 + 6d' u_x z + 2d' v_x^2 = 0$$

oder

$$z = \frac{1}{3d}[-d' u_x \pm \sqrt{d'^2 u_x^2 - 2dd' v_x^2}],$$

also

$$\xi_x' = \frac{1}{3d}[3d u_x - d' u_x + \sqrt{d'^2 u_x^2 - 2dd' v_x^2}]$$

$$\xi_x'' = \frac{1}{3d}[3d u_x - d' u_x - \sqrt{d'^2 u_x^2 - 2dd' v_x^2}].$$

$x_3 = \xi_x'$ und $x_3 = \xi_x''$ müssen die Tangenten an dem Kegelschnitte in den Schnittpunkten mit $x_3 = u_x$ sein. Wir bemerken, daß, wenn u_x verschwindet, der Fall $B5$ vorkommt [vgl. S. 78].

Wir können die Invarianten von f und φ berechnen. Wir finden:

$$f = u_x^2 - \tfrac{1}{3} v_x^2, \quad \varphi = u_x^3 - \tfrac{1}{2} u_x v_x^2$$
$$p_x = (-\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{9} d') u_x$$
$$\Delta = (-\tfrac{1}{3} d + \tfrac{1}{9} d') u_x^2 - \tfrac{1}{18} d v_x^2$$
$$D = -\tfrac{2}{3} d + \tfrac{1}{9} d'$$
$$E = \tfrac{1}{18} d^2 - \tfrac{1}{54} d d'$$
$$R = \tfrac{1}{216} d^3 - \tfrac{1}{108} d^2 d'.$$

Wir setzen den Wert von v_x^2, nämlich $3 u_x^3 - 3 f$, in Δ ein und finden:

$$\Delta = (-\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{9} d') u_x^2 + \tfrac{1}{6} d f.$$

Wir setzen den Wert p_x hier ein und erhalten:

$$(-\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{9} d') \Delta - p_x^2 - \tfrac{1}{6} d (-\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{9} d') f = 0.$$

Zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen für D, E und R können wir d und d' eliminieren und bekommen:

$$(3 D E + 2 R + D^3)(4 E + D^2) \Delta - (4 E + D^2)^2 p_x^2$$
$$- (2 R - D E)(3 D E + 2 R + D^3) f \equiv 0.$$

Wir haben auch gefunden:

$$4 \left(2 E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5 D E - 2 R - 4 F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0.$$

Diese zwei Bedingungen sind notwendig. Ein Beweis, daß sie auch hinreichend sind, fehlt. Er wird aber aus der Theorie der Kurven dritter Ordnung zu entnehmen sein; man wird nachweisen, daß die Form $T \Sigma - S T$ identisch Null ist. Wir können in dem einfacheren Falle (3) beweisen, daß die entsprechenden Bedingungen für diesen Fall hinreichend sind.

(3) Wir nehmen die beliebige Gerade und den beliebigen Kegelschnitt, deren Gleichungen wir in (2) hatten:

$$x_3 - u_x = 0$$
$$x_3^2 + x_3 u_x - 2 u_x^2 + v_x^2 = 0.$$

Wir sehen ohne weiteres, daß die Linie nur dann eine Tangente des Kegelschnittes wird, wenn v_x^2 ein Quadrat ist. Also ist:

$$x_3^3 - 3\left(u_x^2 - \frac{v_x^2}{3}\right)x_3 + 2\left(u_x^3 - u_x\frac{v_x}{2}\right) = 0,$$

wenn wir alle die Symbole als wirkliche Koeffizienten ansehen, die Gleichung einer C_3, welche aus einem Kegelschnitte und seiner Tangente besteht. Wir bekommen die Lösungen dieses Falles, wenn wir $v = v'$ und also $d' = 0$ in Fall (2) einsetzen. So finden wir:

$$\xi_x = \xi_x' = \xi_x'' = u_x \quad \text{und} \quad \eta_x = 0,$$

also $N = M = L = 0$. Wir erhalten auch $K = -\frac{1}{3}(uv)^2$ und $D = -\frac{2}{3}(uv)^2$ und daher $K - \frac{D}{2} = 0$ [vgl. S. 26].

Wir finden die Invarianten von f und φ:

$$D = -\tfrac{2}{3}(uv)^2, \quad \Delta = -\tfrac{1}{18}(uv)^2(6u_x^2 + v_x^2), \quad p_x = -\tfrac{1}{2}(uv)^2 u_x,$$
$$E = \tfrac{1}{18}(uv)^4, \quad R = \tfrac{1}{27}(uv)^6, \quad F = -\tfrac{1}{12}(uv)^6.$$

Als notwendige Bedingungen bekommen wir dann:

(1) (α) $$2E - \frac{D^2}{4} = 0$$

(2) (β) $$5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} = 0$$

(γ) $$R + DE = 0$$

(δ) $$9R + 4F = 0$$

(3) (ε) $$12D\Delta + 3D^2 f - 16p_x^2 \equiv 0.$$

Die Bedingungen (γ) und (δ) sind nur eine Folge von den anderen; denn setzen wir in (ε) $x = a_2$, $x_2 = -a_1$, so bekommen wir

$$12DE + 3D^3 - 16F = 0$$

oder wegen (α):

(ζ) $$9DE - 4F = 0.$$

Aus (α) und (β) haben wir

(η) $$7DE - 2R - 4F = 0$$

und aus (ζ) und (η) folgen (γ) und (δ).

Wir werden jetzt zeigen, daß die Bedingungen (α), (β) und (ε) hinreichend sind.

Wir haben

$$f \cdot N = M\xi_x^2 - 2L\xi_x\eta_x + K\eta_x^2$$

$$2\Delta \cdot N = [K(3M-N) - 4L^2]\xi^2 + [2KL - N(3M-N)]\xi\eta - [2LN + K^2]\eta^2$$

$$2p = (2D - K)\xi + M\eta$$

[vgl. „Binäre Formen", S. 241].

Die Bedingung (ε) sagt dann aus, daß der Ausdruck

$$6D[(K(3M-N) - 4L^2)\xi^2 + (2KL + (3M-N)N)\xi\mu - (K^2 + 2LN)\eta^2] + 3D^2[M\xi^2 - 2L\xi\eta + K\eta^2] - 4[(2D-K)\xi + M\eta]^2 N$$

identisch Null ist.

Setzen wir hier $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$ und dann $x_1 = y_2$, $x_2 = -\eta_1$, so erhalten wir

$$N[(12DL + 4M^2)N + 6DK^2 - 3D^2K] = 0 \tag{4}$$

und

$$N[(16D^2 - 10DK + 4K^2)N + 24DL^2 - 18DKM - 3D^2M] = 0. \tag{5}$$

Die Bedingung (1) bzw. (2) ist dieselbe wie

$$L(N-M) + \left(K - \frac{D}{2}\right)^2 = 0 \tag{6}$$

bzw.

$$3L(N-M)\left(K - \frac{D}{2}\right) + (M - \tfrac{1}{4}N)(N-M)^2 + 2\left(K - \frac{D}{2}\right)^3 = 0. \tag{7}$$

Wir haben immer:

$$2(KM - L^2) = DN. \tag{8}$$

Ist N Null, so werden die Gleichungen (6), (7), (8) folgende Gestalt haben:

$$(9) \qquad L M - \left(K - \frac{D}{2}\right)^2 = 0$$

$$(10) \qquad 4 L \left(K - \frac{D}{2}\right) - 4 M^2 = 0$$

$$(11) \qquad K M - L^2 = 0.$$

Nun ist M entweder Null oder nicht Null. Ist es Null, so ist auch $K - \frac{D}{2}$ Null wegen (9) und L wegen (11); wir haben den gewünschten Fall. Ist M nicht Null, so kann weder L noch $K - \frac{D}{2}$ Null sein wegen (10). Eliminieren wir aber L und M aus (9), (10) und (11), so bekommen wir einen Widerspruch, nämlich:

$$D\left(K - \frac{D}{2}\right)^3 = 0.$$

Ist N nicht Null, so gibt die Gleichung (4)

$$(12) \qquad (12 D L + 4 M^2) N + 3 D K (D - 2 K) = 0$$

und wenn wir umformen mit Hilfe von (8), so gibt (5):

$$(13) \quad (2 D - K)(D - 2 K) N - 3 D M (D - 2 K) = 0.$$

Aus (13) sehen wir, daß entweder $D - 2 K$ Null ist oder die Gleichung

$$(14) \qquad (2 D - K) N - 3 D M = 0$$

entsteht.

Ist $D - 2 K$ Null, so zeigt die Gleichung (6), daß entweder $N - M$ oder L Null ist. Mit L ist auch M Null wegen (12) und dann gibt (8) den Widerspruch $D N = 0$. Ist L nicht Null, dann ist $N = M$ und aus (8) haben wir:

$$2 L^2 = 2 K M - D N = (2 K - D) M = 0,$$

einen Widerspruch.

Also, wenn N nicht verschwindet, so kann $K - \frac{D}{2}$ nicht verschwinden und daher kann L aus (6) auch nicht ver-

schwinden. Wegen (14) sind M und $2D - K$ gleichzeitig Null. Ist aber $M = 0$ und $K = 2D$, so nehmen (6) und (7) die Gestalt:

$$4LN + 9D^2 = 0$$
$$N^3 - 18DLN + 27D^3 = 0.$$

Daraus folgt $N^2 - 6DL = 0$, und aus dieser Gleichung und der ersten finden wir $8L^2 + 3DN = 0$; diese Gleichung aber widerspricht der Gleichung (8):

$$2L^2 + DN = 0.$$

Wir haben also die fünf Gleichungen (6), (7), (8), (12) und (14) und keine der Größen $N, M, L, K - \frac{D}{2}, 2D - K$ ist Null. Aus diesen fünf Gleichungen können wir N und L eliminieren und erhalten:

$$(15)\quad \begin{aligned} &4(D+K)M^3 + 12D\left(K - \frac{D}{2}\right)^2(2D - K) \\ &- K(D - 2K)(2D - K)(D + K) \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} &2K(D+K)^2(2D - K)M^3 - 3D^2(D+K)^2M^3 \\ &+ 2\left(K - \frac{D}{2}\right)^4(2D - K)^3 = 0 \end{aligned}$$

$$(17)\quad (5D - 4K)(D+K)^2M^3 - 4\left(K - \frac{D}{2}\right)^3(2D - K)^3 = 0.$$

Aus (15) und (17) eliminieren wir M^3 und aus (16) und (17) eliminieren wir das andere Glied und erhalten:

$$(18)\quad \begin{aligned} &(D - 2K)(2D - K)[3D(D - 2K)(5D - 4K)(D + K) \\ &- K(D+K)^2(5D - 4K) - 2(D - 2K)^2(2D - K)^2] = 0 \end{aligned}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} &M^3(D+K)^2[8K(2D - K) - 12D^2 \\ &+ (5D - 4K)(D - 2K)] = 0. \end{aligned}$$

(18) und (19) müssen dieselbe Beziehung zwischen K und D liefern. Die Lösungen von (19) sind leicht zu finden.

Sie sind $K = -D$ und $K = \frac{1}{2} D$. Weder eine noch die andere befriedigt (18).

Also muß N und damit M, L und $K - \frac{D}{2}$ Null sein, und wir haben den gewünschten Fall.

Man kann also die Kurve dritter Ordnung im binären Gebiete behandeln. Man bringt die Gleichung der Kurve auf die Form

$$x_3^3 - 3 f x_3 + 2 \varphi = 0$$

und berechnet die Invarianten von f und φ.

Ist:

$$(20) \quad 4\left(2E - \frac{D^2}{4}\right)^3 + \left(5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4}\right)^2 = 0,$$

so hat die Kurve einen Doppelpunkt. Ist:

$$(21) \quad 2E - \frac{D^2}{4} = 0 \quad \text{und} \quad 5DE - 2R - 4F + \frac{D^3}{4} = 0,$$

so ist der Doppelpunkt eine Spitze.

$D = 0$ und $\Delta_x \equiv p_x \equiv 0$ sind die Bedingungen dafür, daß die C_3 in drei durch einen Punkt gehende Gerade zerfällt, $p_x \equiv \Delta_x + Df \equiv 0$ dafür, daß sie in drei beliebige Gerade zerfällt.

$$(20) \text{ und } (3DE + 2R + D^3)(4E + D^2)\Delta_x - (4E + D^2)^2 p_x^2 - (2R - DE)(3DE + 2R + D^3) f = 0$$

sind die Bedingungen für einen Kegelschnitt und eine Gerade, endlich (21) und $12 D\Delta + 3 D^2 f - 16 p^2 = 0$ diejenigen für einen Kegelschnitt und seine Tangente. Ferner kann man die Wendetangenten und die Tangenten in Doppelpunkten und Spitzen binär berechnen. In dem allgemeinsten Falle braucht man nur dazu außer Quadratwurzelziehen eine Wurzel einer biquadratischen Gleichung zu finden und eine kubische Gleichung zu lösen. In manchen speziellen Fällen, die dennoch ziemlich allgemein sind, haben wir gesehen, daß die Lösung viel leichter ist; z. B. wenn f und φ

einen gemeinsamen Faktor haben, haben wir nur eine biquadratische Gleichung zu lösen, und wenn φ ein vollständiger Kubus ist, werden wir statt der kubischen Gleichung nur eine quadratische haben. In diesen Fällen hat die C_3 eine spezielle Lage gegen das Koordinatendreieck, so daß gewisse Elemente des Problems im voraus bekannt sind, wie in § XX schon erörtert wurde. In anderen Fällen ist es uns gelungen, die Lösungen ohne weitere Umrechnung zu finden, in die man nur die Koeffizienten der Kurvengleichung einzusetzen braucht.

Lebenslauf.

Ich, Leroy A. Howland, bin am 6. Juli 1879 zu Acushnet, einem Vorort von New Bedford im Staate Massachusetts, geboren. Nach dem Besuch einer Elementarschule in New Bedford habe ich vier Jahre an der Wesleyan-Universität in Middletown studiert und bin zum Baccalaureus artium promoviert worden. Dann habe ich meine Studien in der Mathematik an der Harvard-Universität zwei Jahre lang fortgesetzt, wobei ich insbesondere bei den Herren Byerly, Osgood und Bôcher hörte. Am Ende des ersten Jahres bin ich dort zum Magister artium promoviert worden. Im Jahre 1906 habe ich von der Harvard-Universität ein Stipendium zum Studium der Mathematik an einer deutschen Universität bekommen, und im Herbst desselben Jahres habe ich mich nach München begeben, wo ich seitdem meine Studien hauptsächlich bei den Herren Professoren Lindemann und Voß fortsetzte; am 6. Juli 1908 bestand ich das Examen rigorosum.